1. Schreiben Sie $z = z_1 + z_2, z_1 - z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ z_1/z_2$ in der Form $z = \alpha + \beta i$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + 2i, \quad & z_2 &= 3 + 4i \\ z_1 &= 1 + i, \quad & z_2 &= 1 - i \end{aligned}$$

2. Seien c, d komplexe Zahlen. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die beiden Zahlen $c + d$ und cd sind reell.

(ii) Die beiden Zahlen c, d sind reell, oder aber $d = \overline{c}$.

3. Seien z_1, z_2, z_3 paarweise verschiedene komplexe Zahlen. Genau dann liegen sie auf einer Geraden, wenn

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \in \mathbb{R}$$

gilt.

4. Man bestimme alle komplexen Zahlen ω mit $\omega^6 = 1$. (Mit Skizze).

Präsenz-Übungen

1, Schreiben Sie z in der Form $z = \alpha + \beta i$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$z = \ i^{15}, \quad i^{-15}, \quad -i^{15}, \quad -i^{-15}, \quad i^{14}, \quad i^{-14}, \quad -i^{14}, \quad -i^{-14}.$$

2, Schreiben Sie $z = z_1 + z_2, z_1 - z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ z_1/z_2$ in der Form $z = \alpha + \beta i$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + 3i, \quad & z_2 &= 3 - 5i \\ z_1 &= 2 + 4i, \quad & z_2 &= -2 - i \\ z_1 &= 3 + 5i, \quad & z_2 &= i \end{aligned}$$

3. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen z in der Form

$$z = |z|(\cos\phi + i \sin\phi)$$

mit $\phi \in R$.

$$z = 1 + i, \quad 1 - i, \quad -1 + i, \quad -1 - i.$$

4. Seien $a, b \in \mathbb{C}$. Die Gleichung

$$z^2 + az + b = 0$$

hat genau dann nur eine Lösung, wenn $a^2 = 4b$ gilt.

5. Sei $z \in \mathbb{C}$ weder reell noch rein imaginär. Man zeige:

(a) Von den Punkten z und $\frac{1}{z}$ liegt einer in der oberen Halbebene, der andere in der unteren Halbebene.

(b) Die Punkte z und $\frac{1}{z}$ liegen entweder beide in der rechten Halbebene, oder beide in der linken Halbebene.

6. Seien z_1, z_2, z_3 komplexe Zahlen auf dem Einheitskreis. Zeige: z_1, z_2, z_3 bilden genau dann ein gleichseitiges Dreieck, wenn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ gilt.