1. Mandelbrot-Menge. Zu jedem $c \in \mathbb{C}$ haben wir eine Folge komplexer Zahlen z_n wie folgt definiert: $z_0 = c$, $z_{n+1} = (z_n)^2 + c$.

(a) Zeige mit Induktion: Ist $|c| \leq \frac{1}{4}$, so gilt $|z_n| \leq \frac{1}{2}$ für alle n.

(b) Zeige mit Induktion: Ist $c = -r$ für $r \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq r \leq 2$, so gilt $|z_n| \leq r$.

2. Ein Ball fällt aus einer Höhe von 2 m auf den Boden, springt hoch, fällt wieder, usw. Jedesmal ist die neue Höhe, die der Ball erreicht, $\frac{4}{5}$ der alten.

(a) Wie lang ist der Weg w, den der Ball insgesamt zurücklegt?

(b) Wie oft muss der Ball hochspringen, damit der bis dahin zurückgelegte Weg w' sich von w um höchstens 1 mm unterscheidet?

3. Gesucht ist jeweils eine konvergente Folge $(a_n)_n$ und eine divergente Folgen $(b_n)_n$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, so dass gilt

(a) Die Folge $(a_n b_n)_n$ ist eine Nullfolge,

(b) Die Folge $(a_n b_n)_n$ konvergiert gegen 1,

(c) Die Folge $(a_n b_n)_n$ ist monoton wachsend und nicht beschränkt,

(d) Die Folge $(a_n b_n)_n$ ist weder nach unten noch nach oben beschränkt.

4. Auf der Rückseite findet man die ersten beiden Seiten einer Vorlesungs-Präsentation an der TU Chemnitz. Man suche (mindestens) vier Fehler und ordne sie ein unter:

(a) Druckfehler (eher belanglos).

(b) Druckfehler (mit Pfiff).

(c) Begriffsverwirrung.

(d) Falsche Aussage, man gebe ein Gegenbeispiel an.

Präsenz-Aufgaben.

1. Zeige: Die Mandelbrotmenge $\mathbb{M}$ ist symmetrisch zur x-Achse.

2. Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Zeige: Auch $(a_n + a_{n+1})_n$ ist konvergent. Wie lautet der Grenzwert?

3. Seien $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ reelle Folgen. Sei $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle n. Zeige: Sind die beiden Folgen $(a_n)_n$ und $(c_n)_n$ konvergent und haben sie den gleichen Grenzwert x, so ist auch $(b_n)_n$ konvergent mit Grenzwert x.

4.* Zeige: (a) Enthält eine reelle Folge keine Teilfolge, die streng monoton wachsend ist, so enthält sie eine Teilfolge, die monoton fallend ist.

(b) Es gibt reelle Folgen, die sowohl streng monoton wachsende, wie auch streng monoton fallende Teilfolgen enthalten.

5.* Zeige: Ist $\sum_t a_t$ eine reelle Reihe, die konvergent, aber nicht absolut konvergent ist, und ist $r \in \mathbb{R}$, so gibt es eine Bijektion $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\sum_t a_{\sigma(t)} = c$. (Man kann also derartige Reihen so umordnen, dass man ein beliebiges Ergebnis erhält.)

6.* Man bestimme die Nullstellen von $X^3 - 4X + 1$ mit Hilfe der Formel von Tartalia-Cardano.