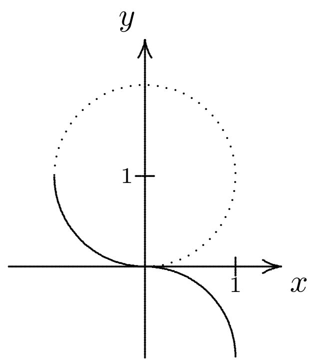
1. Die Fibonacci-Folge. Wo spielen die Fibonacci-Zahlen eine Rolle? (Zur Abwechslung einmal ein kleiner Aufsatz; man informiere sich in Büchern oder im Internet.)

2. Kreisbögen. Man betrachte die folgende auf dem Intervall $[-1, 1]$ definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2}+1 & \text{falls} \quad -1 \leq x < 0, \\ +\sqrt{1-x^2}-1 & \text{falls} \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$



Zeige: Die Funktion ist aus zwei Kreisbögen mit Radius 1 zusammengesetzt: sie ist auf dem Intervall $]-1, 1[$ differenzierbar.

Man berechne $f'(x)$ (bitte auch Zeichnung mit einem Funktionsplotter).

Ist die Funktion auf dem Intervall $]-1, 1[$ zweimal differenzierbar? Warum sollten Straßenbauer einen derartigen Kurvenverlauf für das Herausfahren aus einem Kreisverkehr nicht verwenden? (Praktischer Test: Man fahre von der Paulusstraße über den Berliner Platz in die Feilenstraße.)

3. Alternative Straßenplanung. (a) Gesucht ist eine polynomiale Funktion $g(x)$ mit Grad höchstens 4, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} g(0) &= 0, & & \\ g'(0) &= 0, & \qquad g'(1) &= -1, \\ g''(0) &= 1, & \qquad g''(1) &= 0. \end{aligned}$$

(b) Definiere eine Funktion $h\colon]-1, 2] \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$h(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2}+1 & & -1 < x < 0, \\ g(x) & \text{falls} & 0 \leq x \leq 1, \\ -x+g(1)+1 & & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

Man skizziere die Funktion h. Man zeige, dass h zweimal differenzierbar ist. (Man interpretiere dies im Hinblick auf Straßenführungen).

4. Einkommenssteuer. Gesucht sind Polynome f_2, f_3 vom Grad höchstens 2, und ein lineares Polynom f_4, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{array}{lll} f_2(7\,664) = 0, & f_3(12\,739) = f_2(12\,739), & f_4(52\,151) = f_3(52\,151) \\ f_2'(7\,664) = 0,15, & f_3'(12\,739) = 0,2397, & f_4'(52\,151) = 0,42. \\ f_2'(12\,739) = 0,2397, & f_3'(52\,151) = 0,42. & \end{array}$$

Man bestimme diese Polynome. Zusätzlich sei f_1 das Null-Polynom.

Betrachte die Funktion $f\colon [0, 250\,000] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{falls} \quad 0 \le x \le 7\,664, \\ f_2(x) & \text{falls} \quad 7\,664 < x \le 12\,739, \\ f_3(x) & \text{falls} \quad 12\,739 < x \le 52\,151, \\ f_4(x) & \text{falls} \quad 52\,151 < x \le 250\,000. \end{cases}$$

Man zeiche die Funktionen $f(x), f'(x), f''(x)$ (soweit definiert) und vergleiche $f(x)$ mit der Einkommensteuer-Funktion, die wie folgt definiert ist (die Rundungseffekte müssen nicht diskutiert werden):

Einkommensteuertarif (EStG §32a (1), Fassung vom 18.07.2006).
Die tarifliche Einkommensteuer bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen, Sie beträgt ... jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen

1. *bis* $7\,664$ *Euro (Grundfreibetrag):* 0;
2. *von* $7\,665$ *Euro bis* $12\,739$ *Euro:* $(883,74 \cdot y + 1\,500) \cdot y$.
3. *von* $12\,740$ *bis* $52\,151$ *Euro:* $(228,74 \cdot z + 2\,397) \cdot z + 989$
4. *von* $52\,152$ *bis* $250\,000$ *Euro:* $0,42 \cdot x - 7\,914$.
5. *von* $250\,001$ *an:* $0,45 \cdot x - 15\,414$.

y ist ein Zehntausendstel des $7\,664$ Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten Einkommens. z ist ein Zehntausendstel des $12\,739$ Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten Einkommens. x ist das auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten Einkommen. Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.

Präsenz-Übungen.

1. Sei $(a_n)_n$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, also $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ für $n \ge 1$. Man zeige mit Induktion, dass für $n \ge 1$ gilt: $\sum_{t=1}^{n} a_t = a_n a_{n+1}$.

2. Man zeige: Die einzige positive Zahl b mit $b = \frac{1}{b} + 1$ ist $b = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Die einzige positive Zahl mit $\frac{1}{b} = \frac{b}{1+b}$ ist ebenfalls $b = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

3. Man definiert induktiv: $0! = 1$, und $n! = (n-1)! \cdot n$ für $n \ge 1$. Zeige: Für alle $n \ge 1$ gilt $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$. Man folgere daraus: die Folge $\left(\sum_{t=0}^{n} \frac{1}{t!}\right)_n$ ist beschränkt. Da sie auch monoton wachsend ist, ist sie konvergent und man setzt $e = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{t!}$.

4. Ersetze in der Hausaufgabe 3 die Bedingung $g'(1) = -1$ durch $g'(1) = 1$; entsprechend sei $h(x) = x + g(1) - 1$ für $1 < x \le 2$ definiert. Man skizziere h.

5.* Konstruiere eine streng monotone Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, die unendlich viele Sprungstellen hat. (Definition: x_0 heisst *Sprungstelle* für f, wenn es reelle Zahlen $r_1 < r_2$ gibt mit $f(x) \le r_1$ für $x < x_0$ und $f(x) > r_2$ für $x > x_0$.)