1. Mittelwerte. Berechne die Mittelwerte
(a) der Funktion $\sin(x)$ auf den Intervallen $[0,\pi]$, $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ und $[\pi,2\pi]$,
(b) der Funktion x^n (mit $n\in\mathbb{N}$) auf den Intervallen $[0,1]$ und $[-1,1]$.

2. Legendre-Polynome. Betrachte die Polynome

$$p_0(x)=1,\qquad p_1(x)=x,\qquad p_2(x)=\tfrac{1}{2}(3x^2-1).$$

(a) Zeige: Für alle $0\le m,n\le 2$ gilt

$$(*)\qquad \int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)\,\mathrm{d}\,x=\begin{cases}0 & \text{falls}\quad m\neq n\\ \frac{2}{2n+1} & \text{falls}\quad m=n\end{cases}$$

(b) Konstruiere ein Polynom p_3 vom Grad 3, so dass $(*)$ für $0\le m,n\le 3$ gilt.

3. Kegel, Kugel, Zylinder. Seien $a\le b$ reelle Zahlen, sei $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Funktion, die nur nicht-negative Werte annimmt. Men nennt die Menge

$$R(f)\colon=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b,\ 0\le y^2+z^2\le f(x)^2\}$$

einen *Rotationskörper,* sein Volumen $\mathrm{vol}(R(f))$ berechnet man mit der Formel

$$\mathrm{vol}(R(f))=\pi\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}\,x.$$

Mit dieser Formel soll das Volumen der folgenden Rotationskörper bestimmt werden:
(a) Kreiszylinder: die Grundfläche sei ein Kreis mit Radius r, die Höhe sei $2r$.
(b) Kugel mit Radius r.
(c) Kreiskegel: die Grundfläche sei ein Kreis mit Radius r, die Höhe sei $2r$.

Wenn man die drei Volumina vergleicht, was fällt auf?

4. Merkwürdig. Wir betrachten die Funktion $f(x)=\frac{1}{x}$ und dazu die Rotationskörper

$$R(f,n)\colon=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}\mid 1\le x\le n,\ 0\le y^2+z^2\le f(x)^2\}.$$

(a) Bestimme das Volumen $\mathrm{vol}(R(f,n))$ und zeige, dass die Folge dieser Zahlen konvergiert: man sieht auf diese Weise, dass der (unendliche) Rotationskörper $R(f)=\bigcup_n R(f,n)$ ein **endliches** Volumen hat.

(b) Man kann auch den Flächeninhalt $m(n)$ der Mantelfläche des Rotationskörper $R(f,n)$ berechnen, und zwar mit der Formel

$$m(n)=2\pi\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}\,x=2\pi\int_1^n \tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x.$$

Zeige: Die Folge $m(n)$ konvergiert **nicht**, sondern strebt gegen unendlich.

(*Stellt man sich $R(f)$ als eine Art Tüte vor, so fasst diese Tüte nur endlich viel Farbe. Will man aber $R(f)$ außen färben, so braucht man unendlich viel Farbe!*)

Präsenz-Aufgaben.

1. (a) Mit welcher Geschwindigkeit erreicht ein Turmspringer beim Sprung vom Zehnmeterturm die Wasseroberfläche? (b) Wie groß ist seine Durchschnitts-Geschwindigkeit während des Flugs?

Man löse die Aufgabe (b) auf zwei verschiedene Weisen: Zuerst berechne man die Zeit, nach der die Wasseroberfläche erreicht wird, und verwende die Formel: Durchschnittsgeschwindigkeit = Weg / Zeit. Zweitens bestimme man die Funktion: Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit und verwende die Integralformel für Mittelwerte. Man vergleiche beide Zugänge.

2. Die folgende Tabelle zeigt die Sonnen-Aufgänge (A) und Sonnen-Untergänge (U) für Bielefeld am 1. und am 16. eines jeden Monats. Man berechne die mittlere Tageslänge für die Monate Januar, April und Juni unter Verwendung der Simpson'schen Formel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \;\approx\; \tfrac{b-a}{6}\big(f(a)+4f(\tfrac{b+a}{2})+f(b)\big)$$

wobei a und b für die jeweiligen Monatsanfänge stehen; als Monatslänge nehme man jeweils 30 Tage.

Monat	A	U	A	U
Januar	8:27 h	16:24 h	8:21 h	16:43 h
Februar	8:01 h	17:11 h	7:37 h	17:37 h
März	7:08 h	18:02 h	6:38 h	18:26 h
April	6:02 h	18:56 h	5:25 h	19:20 h
Mai	4:57 h	19:42 h	4:33 h	20:04 h
Juni	4:12 h	20:28 h	4:05 h	20:39 h
Juli	4:08 h	20:42 h	4:19 h	20:36 h
August	4:43 h	20:13 h	5:04 h	19:49 h
September	5:30 h	19:14 h	5:52 h	18:42 h
Oktober	6:22 h	18:01 h	6:45 h	17:30 h
November	7:14 h	16:57 h	7:39 h	16:34 h
Dezember	8:01 h	16:19 h	8:19 h	16:13 h

3. Wie groß ist die durschschnittliche Fläche von Kreisen, deren Radien zwischen zwei und drei Zentimeter variieren?