

Aufgabe 1. Gegenbeispiel:

$$A_1 = \{1\}, A_2 = \emptyset, B_1 = \emptyset, B_2 = \{1\}.$$

Aufgabe 2. Zum Beispiel $x = 4$ und $y = 3,5$ (dies sind gerade die jeweiligen Mittelwerte).

Aufgabe 3. Gegenbeispiel: $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = 0$.

Aufgabe 4. Multiplikation mit r liefert $r^2 + 1 = 2r$. Also ist $(r-1)^2 = r^2 - 2r + 1 = 0$, und demnach $r - 1 = 0$, also $r = 1$.

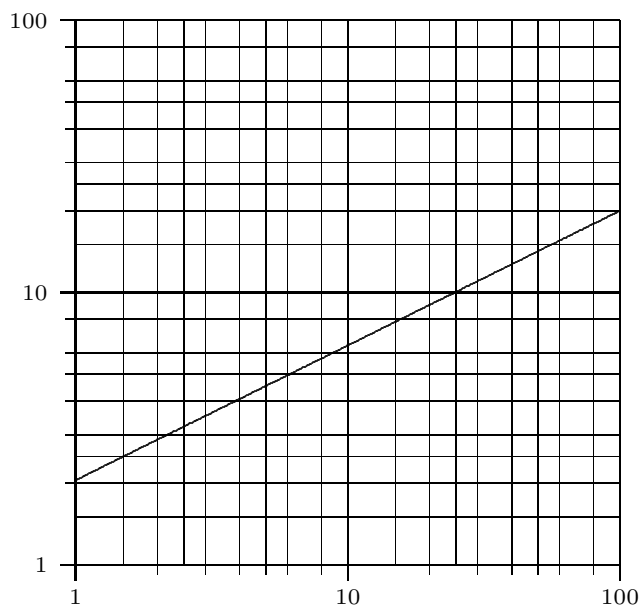
Aufgabe 5. Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2(x-1)^2}.$$

Aufgabe 6. Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^x}.$$

Aufgabe 7. Es ist $f(1) = 2$ und $f(100) = 20$, also ist die Gerade durch die Punkte $(1 \mid 2)$ und $(100 \mid 20)$ zu zeichnen.



Aufgabe 8. $18 \cdot 1,5^n = 200$, also $n \log 1,5 = \log(200/18)$, also $n = 5,9$ Jahre.

Aufgabe 9.

Erster Beweis: Nach Satz 8.6 lässt sich jede Funktion **eindeutig** als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion schreiben. Wenden wir dies auf $g_1 + u_1 = g_2 + u_2$ an, so folgt aus der Eindeutigkeit die Behauptung.

Zweiter Beweis: Aus $g_1 + u_1 = g_2 + u_2$ folgt $g_1 - g_2 = u_2 - u_1$. Nach 8.6 (1) ist $g_1 - g_2$ gerade, nach 8.6 (1') ist $u_2 - u_1$ ungerade. Also ist die Funktion $g_1 - g_2$ sowohl gerade als auch ungerade, und demnach wegen 8.6 (3) die Nullfunktion. Also ist $g_1 - g_2 = 0$ und demnach $g_1 = g_2$. Entsprechend ist $u_2 - u_1 = 0$, also $u_2 = u_1$.

Aufgabe 10. Gegenbeispiel: Sei $f(x) = g(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Funktionen f und g sind monoton wachsend, aber $(fg)(x) = x^2$ ist **nicht** monoton wachsend.

Aufgabe 11.

- (a) richtig
- (b) falsch. Zum Beispiel für $x = -1$.
- (c) falsch. Zum Beispiel für $x = 1, y = 0$.
- (d) falsch. Zum Beispiel für $x = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 12. Es handelt sich hier um eine geometrische Reihe.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \frac{2}{3}.$$

Aufgabe 13. Für beliebige reelle Zahlen $r > 1$ ist der Beweis gar nicht so einfach. Hier der Beweis im Fall $r \geq 1,3$. Sei $c = (0|r) = ri$. Es ist $c^2 + c = (ri)^2 + ri = -r^2 + ri$. Das Quadrat des Betrags dieser komplexen Zahl ist

$$|c^2 + c|^2 = r^4 + r^2,$$

und für $r \geq 1,3$ ist $r^4 + r^2 > 4$, also $\sqrt{r^4 + r^2} > 2$. Nach Satz 10.7 (1) gehört demnach c nicht zur Mandelbrotmenge.

Aufgabe 14. Sei $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

t	1	2	3	4	5	6
α_t	1	γ	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\gamma$
β_t	0	$\frac{1}{2}$	γ	1	γ	$\frac{1}{2}$

t	7	8	9	10	11	12
α_t	-1	$-\gamma$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	γ
β_t	0	$-\frac{1}{2}$	$-\gamma$	-1	$-\gamma$	$-\frac{1}{2}$

Aufgabe 15. Induktionsanfang $n = 1$: Es ist $1 = 1$.

Induktionsschritt: Sei $\sum_{t=1}^n (2t-1) = n^2$. Es ist

$$\sum_{t=1}^{n+1} (2t-1) = \sum_{t=1}^n (2t-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Aufgabe 16. Sei $g(x) = -x^2 - 2x + 1$. Dann ist

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = -2, \quad g(-2) = 1.$$

Aufgabe 17. Es ist $\lambda = \pi$, also $f(x) = \sin(\pi x)$. Eine Stammfunktion von f ist $-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x)$, also

$$\int_0^1 \sin(\pi x) \, dx = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \Big|_0^1 = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi) - \left(-\frac{1}{\pi} \cos(0) \right) = \frac{1}{\pi} - \left(-\frac{1}{\pi} \right) = \frac{2}{\pi}.$$

Aufgabe 18. Es ist $f(r) = 2\pi r$. Eine Stammfunktion von $2\pi r$ ist πr^2 .

$$MW(f) = \frac{1}{5-2} \int_2^5 2\pi r \, dr = \frac{1}{3} \pi r^2 \Big|_2^5 = \frac{1}{3} \pi (25 - 4) = 7\pi.$$

Zusätze (28.09.2008):

Zu Aufgabe 3. Erst bei der Korrektur der Klausuren fiel auf, dass der Text der Aufgabe 3 auf zwei verschiedene Weisen gelesen werden kann (auch bei der zweiten Interpretation gibt es Gegenbeispiele zur angegebenen Behauptung)!

Die Formulierung:

$$f(i) = g(i) \quad \text{für } i = 0, 1$$

wird “üblicherweise als Abkürzung für die beiden Bedingungen:

$$f(0) = g(0) \quad \text{und} \quad f(1) = g(1)$$

verwandt, so war die Aufgabe gemeint. Einige haben die Formulierung aber anders gelesen: dass nämlich mit i der abbrechende Dezimalbruch $0,1 = \frac{1}{10}$ gemeint sei, dass also

$$f\left(\frac{1}{10}\right) = g\left(\frac{1}{10}\right)$$

gelten soll. Interpretiert man die Aufgabe 3 auf diese Weise, so ist das Funktionenpaar

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{10}\right)^2 \quad \text{und} \quad g(x) = -\left(x - \frac{1}{10}\right)^2$$

ein Gegenbeispiel.

Zu Aufgabe 4. Statt der Bedingung $r > 0$ wird nur $r \neq 0$ gebraucht!