

Kommentare zu den Aufgaben.

Aufgaben, die jeder, der an der Veranstaltung aktiv teilgenommen hat, ohne weiteres Nachdenken lösen können muss:

1. Dies ist nur leicht verändert die Präsenzaufgabe 13.3.

4. Diese Aufgabe entspricht der Hausaufgabe 11.2, ist aber einfacher! Offensichtlich ist zu berechnen:

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots,$$

denn die Quadrate haben Kantenlänge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$. Es handelt sich also um die geometrische Reihe $\sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^t$.

Zusatz: Geometrische Folgen, geometrische Summen, geometrische Reihen wurden mehrfach in der Vorlesung angesprochen, ich selbst habe dies getan, Herr Farnsteiner, der mich bei den Potenzreihen vertrat, hat dies noch einmal getan (es wurde zweimal vollständig die Summenformel hergeleitet, und die ist nun einmal auch wirklich Schulstoff). Die Aufgabe 11.2 (das Ballhüpfen) ist ganz ähnlich, nur durch Steigen und Fallen viel komplizierter.

Was ist schwer? Es sind drei Schritte: (1) Man muss sehen, dass $1 + (1/2)^2 + (1/4)^2 + \dots$ zu berechnen ist. Das muss man doch sehen. (2) Die Reihenformel ist anzuwenden. Meines Erachtens ist dies eine Formel, die man auswendig können muss (hätte ich eine Formelsammlung für schwierige Formeln herausgegeben, hätte ich sie wohl nicht einmal notiert). Im Leitfaden p.11-9 ist die Formel eingerahmt, also auch kaum zu übersehen. (3) Man muss $\frac{4}{4-1}$ berechnen (oder hinschreiben!)

6. Diese Aufgabe ist fast wörtlich eine der Aufgaben des Aufgabenzettels 8, und zwar die Aufgabe 8.2 (b), wobei nun Monotonie statt strenger Monotonie thematisiert wird.

Zusatz: Im Gegensatz zu den vorangegangenen Vorlesungen von Preston und Rost habe ich sicher zu wenig Zeit auf das Einüben formaler Beweise verwendet. Ich habe mich hier stark eingeschränkt; den Beweisstrategien für die Aufgaben 6) und 9) wurde aber meiner Meinung nach viel Zeit gewidmet (so wurde für Beweise wie bei der Klausuraufgabe 6 der **ganze** Übungszettel 8 gewidmet).

7. Wie Aufgabe 10.4, nur einfacher: denn die Punkte auf den Diagonalen $\{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $\{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ haben natürlich einfachere Koordinaten! Siehe auch die Zusatzaufgabe 14.5.

9. Hier handelt es sich wohl um eine der einfachsten Aufgaben für vollständige Induktion überhaupt. Sie ist ganz analog zur Aufgabe 9.2.

10. Siehe Leitfaden 8.6 (Satz); dies wurde auch mehrfach in der Vorlesung betont.

Zusatz: Bei den gesuchten Funktionen handelt es sich ja nicht einmal um willkürliche Funktionen, sondern $g(x)$ ist die kanonische Kettenlinie (Leitfaden 8-2). Der Abschnitt 8.6 war in der Vorlesung keinesfalls ein Anhängsel, sondern der zentrale Abschnitt innerhalb des Teils 8 (so diente er als Vorlage für den Übungszettel 8, der ja ganz parallel aufgebaut ist.)

Den Satz über die Eindeutigkeit der Darstellung einer jeden Funktion als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion habe ich als einen der Sätze herausgehoben, deren Beweis man kennen muss. Ich bin an dieser Stelle länger darauf

eingegangen, dass es zwei Sorten von Beweisen gibt: technische, die man sofort vergessen wird, auch vergessen darf, und solche, die zwar vielleicht überraschend sind, auf die man also vielleicht nicht selber kommt, die man aber, wenn man sie einmal gesehen hat, nie mehr vergessen wird, auch nicht vergessen darf... (Bei derartigen Kommentaren wurde es aber im Hörsaal meist immer unruhig, weil die Vorstellung bestand, bei Kommentaren braucht man nicht zuzuhören - ich habe mich oft darüber beklagt.)

12. Diese Aufgabe ist fast identisch mit einer Teilaufgabe von 6.4 (und einer der Aufgaben auf dem Präsenzzettel 6-2).

14. Dies ist eine vereinfachte Teilaufgabe von 5.1.

15. Dass ein von Null verschiedenes Polynom vom Grad n höchstens n Nullstellen hat, wurde in der Vorlesung immer wieder betont. Hier muss man dies auf das Polynom $f - g$ anwenden (und dass man zum Vergleich zweier Funktionen f, g meist die Differenz $f - g$ heranzieht, wurde ebenfalls mehrfach in der Vorlesung betont).

Zusatz: Dass Polynome vom Grad n höchstens n Nullstellen haben, wurde mehrfach thematisiert: im Abschnitt 5 (Polynome), im Abschnitt 10 (komplexe Zahlen, Fundamentalsatz) und dann noch einmal im Rahmen der Einführung der Potenzreihen.

18. Die Venn-Diagramme zeigen sofort, dass die beiden Mengen nicht gleich sein können. Sie legen auch nahe, wie man ein Gegenbeispiel findet.

Insgesamt sind dies also mehr als die Hälfte der Aufgaben!

Grundkenntnisse.

8. Das muss jeder Lehrer im Schlaf beherrschen!

Es handelt sich dabei zwar einfach um Rechenregeln für das Arbeiten mit Zahlen, aber es empfiehlt sich, dies im Rahmen der Vorlesung *Funktionen* zu betonen, da es sich um funktionale Eigenschaften handelt.

*Eigentlich sollte man nur dann einen Punkt geben, wenn wirklich **alle vier** Aussagen richtig beantwortet wurden.*

Die weiteren Aufgaben.

2. Das übliche Skalieren (immer wieder geübt) zeigt sofort $\lambda = \pi$. Dann muss man noch wissen, wie man mit der inneren Ableitung umgeht.

Zusatz: Als erstes ist das Lambda zu bestimmen, dies haben wir in der Vorlesung wie auch in mehreren Aufgaben geübt, und das nicht nur einmal: Ich habe im Abschnitt 2 beim linearen Skalieren eine Unmenge von Beispielen angemalt (quadratisch, sin, exp, logistisch, mit jeweils mehreren Parametern) - in Gesprächen am Rand der Vorlesung wurde dies von einer Reihe von Studenten als überflüssig, weil offensichtlich, kritisiert, ich habe es trotzdem in der folgenden Vorlesung weiter geführt. Ich habe das Beispiel des maximalen Sonnenstands vollständig vorgeführt, es hat die Ratten-Temperatur-Aufgabe gegeben ..., was hätte ich mehr tun sollen? Sobald man Lambda kennt, muss man beim Ableiten an die innere Ableitung denken: dazu gab es jüngst den Einschub, der noch einmal anschaulich erläutern sollte, was die (ansonsten vielleicht merkwürdige) Formel bedeutet (siehe Leitfaden 12.6).

3. Derartige stückweise definierten Funktionen waren das Thema der Aufgaben 12.2, 12.3, 12.4 und der Präsenzaufgabe 12.4., wobei die Klausuraufgabe aber viel leichter war!

5. Hier muss man die Definition von $\mathbb{M}$ kennen. Für $r > 1$ gilt $r^2 + r > 2$, dies ist das einzige, was man rechnen muss.

Zusatz: Zur Mandelbrotmenge gab es die Übungsaufgabe 11-1 und die Präsenzaufgabe P11-1. In der Vorlesung habe ich (meines Erachtens wirklich ausführlich) die Aussagen 10.7 (1), (2) und (3) bewiesen (die Aussage (4) wurde nur gestreift). Bei der Klausuraufgabe musste man überhaupt nur das Beweisprinzip für diese Aussagen verstanden haben, denn der eigentliche Rechenaufwand betrifft ja nur reelle Zahlen...

11. Dies ist eine Standard-Aufgabe zu exponentiellem Wachstum, und entspricht den Aufgaben 6.2 (und den Präsenzaufgaben 6.4 und 7.3). Lediglich die Einkleidung ist eine andere. (Aber es handelt sich um eine ganz wichtige Anwendung!)

13. Wer den Graphen der Funktion $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ kennt (und der wurde mehrfach in der Vorlesung thematisiert), sollte die Aufgabe sofort lösen können (und es gibt ja sogar eine ganz triviale Lösung).

16. Hier muss man die Formel für den Brennpunkt einer Parabel kennen (siehe Leitfaden Satz 4.2), zusätzlich muss man noch wissen, wie man eine Parabel hin und her schiebt (aber das wurde oft geübt). Zusatz: Hier sollte ich hinzufügen, dass es sich um ein Thema handelt, das ich wegen der dauernden Störungen nicht zu Ende geführt habe (ich habe ja einmal nach etwa 60 Minuten die Vorlesung abgebrochen)...

17. Hier sollte man tunlichst wissen, dass das Paar der Mittelwerte $(\bar{x}, \bar{y})$ auf jeder der beiden Regressionsgeraden liegt (sonst rechnet man ewig), aber auch das wurde damals betont.

18. Präsenzaufgabe 1.2 (c) zeigt, dass die Aussage falsch ist.

So, das wars! Wenn Sie ehrlich sind, müssen Sie zugeben, dass die Klausur wohl doch nicht zu schwer war ...