

Klausur 1: Lösungen.

1. Antwort: $\frac{4}{3}\pi$.

Rechnung:

$$\text{MW}(f) = \frac{1}{2} \int_0^2 f(r) \, dr = \frac{1}{2} \int_0^2 \pi r^2 \, dr = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \pi r^3 \Big|_0^2 = \frac{1}{6} \pi \cdot 8 - 0 = \frac{4}{3} \pi.$$

2. Antwort: $-\pi$.

Durchführung: Es ist offensichtlich $\lambda = \pi$, also $f(x) = \sin(\pi x)$, also $f'(x) = \sin'(\pi x) \cdot \pi$, denn die innere Ableitung ist die Konstante π . Nun ist aber $\sin'(x) = \cos(x)$, also also $f'(1) = \cos(\pi) \cdot \pi = -\pi$.

3. Antwort: $g(x) = x^2 + 2x + 1$.

Durchführung: Es muss gelten: $g(0) = 1$ und $g'(0) = 2$, denn die Ableitung von e^{2x} ist $e^{2x} \cdot 2$. Sei $g(x) = a + bx + cx^2$, also $g'(x) = b + 2cx$. Aus $g(0) = 1$ folgt $a = 1$, aus $g'(0) = 2$ folgt $b = 2$. Wegen $g(-1) = 0$ ist $0 = a - b + c = 1 - 2 + c$, also $c = 1$.

4. Antwort: $F = \frac{4}{3}$.

Begründung: $F = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^t = \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3}$.

5. Beweis: Es ist $r^2 + r > 2$, also $|(r, 0)^2 + (r, 0)| = r^2 + r > 2$. Wegen 17.2 (2) ist $(r, 0) \notin \mathbb{M}$.

6. Beweis: Sei $x_1 \leq x_2$. Dann ist $-x_2 \leq -x_1$. Weil f monoton wachsend ist, ist $f(-x_2) \leq f(-x_1)$, also $g(x_1) = -f(-x_1) \leq -f(-x_2) = g(x_2)$.

7. Setze $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Hier sind 8 verschiedene komplexe Zahlen $c_t = \alpha_t + \beta_t i$

t	1	2	3	4	5	6	7	8
α_t	1	γ	0	$-\gamma$	-1	$-\gamma$	0	γ
β_t	0	γ	1	γ	0	$-\gamma$	-1	$-\gamma$

Zusatz: Das Polynom $x^8 - 1$ hat Grad 8, also höchstens 8 Nullstellen, daher kann es keine weitere Lösung geben.

8. Antwort: Falsch sind (a), (b), (d).

Begründung: Für (a), (b) betrachte $x = -1$. Es ist $|-x| = 1$ und auch $\sqrt{-x} = 1$. Für (c) nimm $x = \frac{1}{2}$. Es ist $x^2 = \frac{1}{4}$. Zu (c): Es ist $0 \leq (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$.

9. Beweis: Induktionsanfang mit $n = 1$. Links steht 2, rechts steht $1 + 1$. Sei die Aussage richtig für n . Es ist

$$\sum_{t=1}^{n+1} 2t = \sum_{t=1}^n 2t + 2(n+1) = n + n^2 + 2(n+1) = n + 1 + (n+1)^2.$$

10. Antwort: $g(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $u(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Begründung: siehe Leitfaden 8.6.

11. Antwort: ungefähr 871 Jahre.

Rechnung: $t = 5730 \cdot \log_2(0,9) = -870,98$.

12. Beispiel: $f(t) = 0,087 \cdot (1,06)^t$.

Begründung: Da die t -Achse linear, die y -Achse logarithmisch ist, sucht man eine Funktion der Form $f(t) = c \cdot e^{\lambda t}$. Man liest ab: $f(30) = 0,5$ und $f(8) = 10$. Also:

$$c \cdot e^{\lambda 30} = 0,5, \quad c \cdot e^{\lambda 80} = 10.$$

Daraus folgt $e^{\lambda(80-30)} = \frac{10}{0,5} = 20$, also $(e^\lambda)^{50} = 20$, also $e^\lambda = \sqrt[50]{20} \approx 1,06$. Aus

$$0,5 = c \cdot e^{\lambda 30} = c \cdot (1,06)^{30}$$

erhält man $c \approx 0,087$.

13. Beispiel: $f(x) = -\frac{2}{x^2 + 1}$

An derartige Beispiele war gedacht — clevere Klausur-Teilnehmer finden aber eine viel einfachere Lösung: $f(x) = -2$.

14. Beispiel: $f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$.

15. Beweis: Das Polynom $f - g$ hat Grad höchstens 4 und hat die fünf Nullstellen 0, 1, 2, 3, 4. Ein von Null verschiedenes Polynom vom Grad 4 hat aber höchstens vier Nullstellen (Leitfaden 5.3, Folgerung 1), also ist $f - g = 0$. und demnach $f = g$.

16. Antwort: $u = 3$, $v = 0$.

Begründung: Die Parabel $y = cx^2$ hat den Brennpunkt $(0 \mid \frac{1}{4c})$. Für $c = \frac{1}{8}$ ist der Brennpunkt also $(0 \mid 2)$. Nun müssen wir die Parabel noch verschieben.

Da die Nullstellen 7 und -1 sind, hat der Scheitelpunkt die x -Koordinate 3. Seine y -Koordinate ist -2 , also ist $y = \frac{1}{8}(x-7)(x+1) = \frac{1}{8}(x-3)^2 - 2$. Demnach ist der Brennpunkt um 3 Einheiten nach rechts und um 2 Einheiten nach unten zu verschieben.

17. Antwort: $u = 5$, $v = 3$.

Begründung: Der Schnittpunkt der beiden Regressionsgeraden ist $(\bar{x}, \bar{y})$, falls nicht alle Paare auf einer Geraden liegen, aber das ist hier nicht der Fall. Die Mittelwerte $\bar{x}, \bar{y}$ kann man leicht ausrechnen.

18. Ein mögliches Gegenbeispiel: $A = \{1\}$, $B = C = \emptyset$. Links erhält man die leere Menge, rechts dagegen A .

Andere Argumentation: Man nehme Mengen A, B, C , so dass es ein x gibt mit $x \in A$, aber $x \notin C$. Dann ist x ein Element der rechten Menge (wegen $x \in A$), aber kein Element der linken Menge (wegen $x \notin C$).