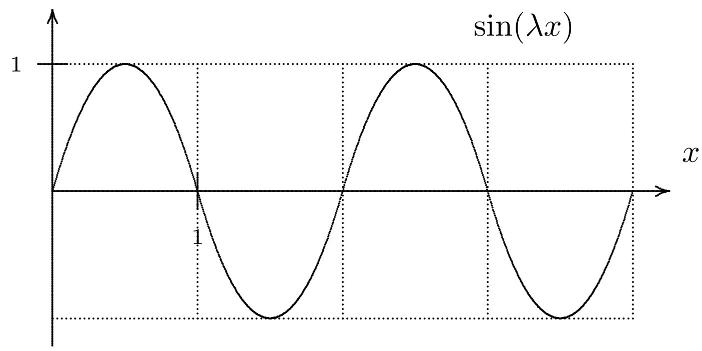
Bei den meisten Aufgaben soll nur das **Endergebnis** notiert werden. **Beweise** oder Begründungen werden nur für die Aufgaben 5, 6, 9, 15, 18 verlangt. Für Rechnungen steht jeweils unten Platz zur Verfügung (diese Rechnungen werden **nicht** bewertet).

Für jede Aufgabe, die vollständig und richtig gelöst ist, gibt es einen Punkt.

Aufgabe 1. Wie groß ist die durchschnittliche Fläche von Kreisen mit Radius höchstens 2 ? (Sei $f(r)$ der Flächeninhalt des Kreises mit Radius r, dabei sei $0 \leq r \leq 2$. Gesucht ist also $\mathrm{MW}(f)$.)

Antwort: $MW(f) =$

Afgabe 2. Die Funktion $f(x) = \sin(\lambda x)$ habe folgenden Graphen:



Bestimmen Sie $f'(1)$.

Antwort: Es ist $f'(1) =$

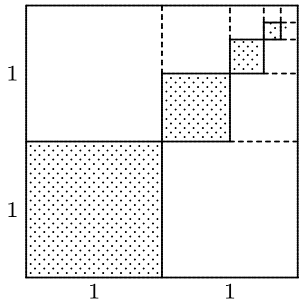
Aufgabe 3. Gesucht ist ein quadratisches Polynom $g(x)$ mit $g(-1) = 0$, so dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{für} \quad x \geq 0 \\ g(x) & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

differenzierbar ist.

Antwort: $g(x) =$

Aufgabe 4. Welchen Flächeninhalt F hat die punktierte Fläche (sie besteht aus unendlich vielen Quadraten)? Gesucht ist der **genaue** Flächeninhalt!



Antwort: $F =$

Aufgabe 5. Sei $r > 1$ eine reelle Zahl. **Beweise:** Der Punkt $(r|0) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ gehört **nicht** zur Mandelbrotmenge $\mathbb{M}$. (Alle in der Vorlesung bewiesenen Saetze dürfen verwendet werden).

Aufgabe 6. Beweise oder widerlege: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion, und ist $g(x) = -f(-x)$ für alle x, so ist g ebenfalls monoton wachsend.

Aufgabe 7. Gesucht sind 8 verschiedene komplexe Zahlen $c_t = \alpha_t + \beta_t i$ mit $\alpha_t, \beta_t \in \mathbb{R}$, für die ${c_t}^8 = 1$ gilt.

t	1	2	3	4	5	6	7	8
α_t								
β_t								

Aufgabe 8. Welche der folgenden Aussagen sind **falsch** ?
(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $|-x| = x$.
(b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{x^2} = x$.
(c) Für jedes Paar $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $2xy \leq x^2 + y^2$.
(d) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq x^2$.

Antwort: Falsch sind die Aussagen ......

Aufgabe 9. Man beweise mit vollständiger Induktion

$$\sum_{t=1}^{n} 2t = n + n^2.$$

Aufgabe 10. Man schreibe $f(x) = e^x$ in der Form $f(x) = g(x) + u(x)$, dabei sei $g(x)$ eine gerade Funktion, $u(x)$ eine ungerade Funktion.

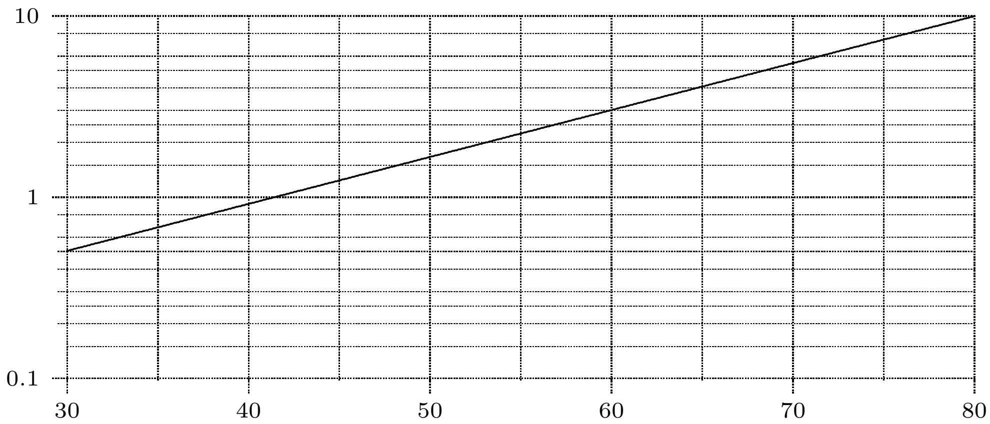
Antwort:

$$g(x) =$$
$$u(x) =$$

Aufgabe 11. Zur Altersbestimmung alter Gebäude mit Holzbalken kann man die Radiokohlenstoff-Datierung verwenden: In der Biomasse einer lebenden Pflanzen ist der Anteil des (radioaktiven) Kohlenstoff-Isotops ^{14}C am gesamten Kohlenstoff ziemlich konstant. Sobald ein Baum gefällt wird, nimmt dieser Anteil exponentiell ab, und zwar mit einer Halbwertszeit von 5 730 Jahren. Bei einem Balken stellt man fest, dass nur noch 90% des ursprünglichen ^{14}C-Anteils verhanden ist. Wie alt ist der Balken?

Antwort:

Aufgabe 12. Man bestimme eine Funktion $f(t)$ mit folgendem Graphen:



Antwort: Zum Beispiel $f(t) =$

Aufgabe 13. Gesucht ist eine rationale Funktion f mit $-2 \leq f(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(0) = -2$.

Antwort: Zum Beispiel $f(x) =$

Aufgabe 14. Gesucht ist ein Polynom $f(x)$ das nur nicht-negative Werte annimmt und das -1 und 1 als einzige Nullstellen hat.

Antwort: Zum Beispiel $f(x) =$

Aufgabe 15. Seien f, g Polynome vom Grad 4 mit $f(i) = g(i)$ für $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Zeige: es gilt auch $f(5) = g(5)$. (Alle in der Vorlesung bewiesenen Sätze können verwendet werden.)

Beweis:

Aufgabe 16. Man gebe den Brennpunkt (u, v) der Parabel $y = \frac{1}{8}(x-7)(x+1)$ an.

Antwort:

$u =$

$v =$

Aufgabe 17. Gegeben seien folgende Datenpaare

x	7	1	3	4	3	6	8	8	1	9
y	2	5	4	4	3	2	2	2	5	1

Man bestimme den Schnittpunkt $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ der beiden Regressionsgeraden.

Antwort:

$u =$

$v =$

Aufgabe 18. Beweise oder widerlege: Sind A, B, C Mengen, so ist

$$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C).$$

Beweis oder Gegenbeispiel: