

Erwartet wird die Bearbeitung von 12 Aufgaben. Für jede vollständig gelöste Aufgabe gibt es einen Punkt. Zum Bestehen der Klausur braucht man mindestens 6 Punkte.

Aufgabe 1. Beweise oder widerlege: Sind A_1, A_2, B_1, B_2 Mengen, so gilt

$$(A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2) \supseteq (A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2).$$

Aufgabe 2. Gegeben seien folgende Datenpaare

x	1	5	3	6	7	2
y	3	4	3	4	4	3

Man gebe ein Datenpaar (x, y) an, so dass sich beim Hinzufügen die Regressionsgerade **nicht** ändert.

Aufgabe 3. Seien f, g Polynome vom Grad 2 mit $f(i) = g(i)$ für $i = 0, 1$. Man beweise oder widerlege: Es gilt auch $f(2) = g(2)$. (Alle in der Vorlesung bewiesenen Sätze können verwendet werden.)

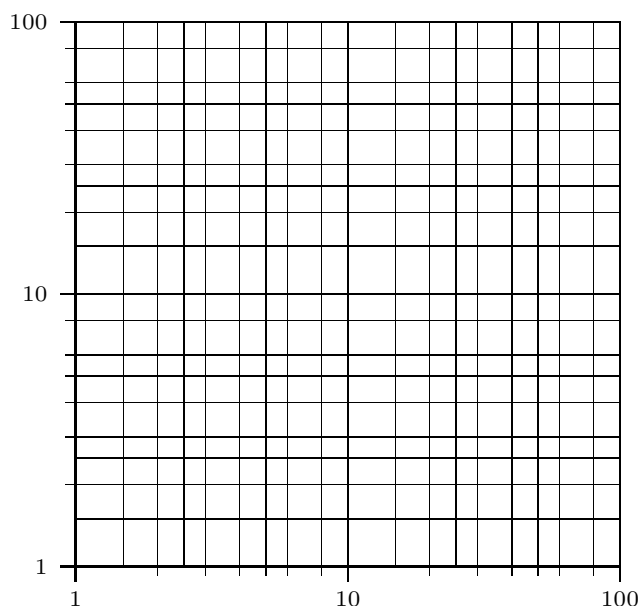
Aufgabe 4. Man beweise: Ist $0 < r \in \mathbb{R}$ und $r + \frac{1}{r} = 2$, so ist $r = 1$.

Aufgabe 5. Gesucht ist eine rationale Funktion f mit Polstellen bei $x = -1$ und $x = 1$ für die $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ gilt.

Aufgabe 6. Gesucht ist eine streng monoton fallende Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 < f(x) < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 7. Man trage in das Koordinatensystem den Graphen der folgenden Funktion ein:

$$f(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$$



Aufgabe 8. Der Weiße Nil wurde oberhalb des Staudamms von Jebel Aulia durch ein Unkraut, die Wasserhyazinthe, überwachsen. 1959 bedeckte die Pflanze nur 18 km^2 , aber der jährliche Zuwachs betrug 50 %. Wie lange dauerte es, bis die ganze Fläche des Stausees von 200 km^2 bedeckt war?

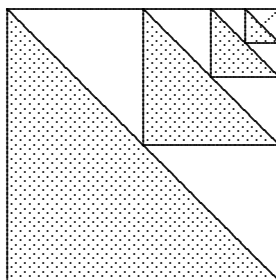
Aufgabe 9. Gegeben seien zwei Funktionen $g_1, g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die gerade sind, und zwei Funktionen $u_1, u_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die ungerade sind, mit $g_1 + u_1 = g_2 + u_2$. Man beweise, dass gilt: $g_1 = g_2$ und $u_1 = u_2$. (Alle in der Vorlesung bewiesenen Sätze dürfen verwendet werden.)

Aufgabe 10. Beweise oder widerlege: Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen. Dann ist fg ebenfalls monoton wachsend.

Aufgabe 11. Welche der folgenden Aussagen sind **falsch** ?

- (a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $|-x| = |x|$.
- (b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{x^2} = x$.
- (c) Für jedes Paar $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $2xy \geq x^2 + y^2$.
- (d) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq x^2$.

Aufgabe 12. Welchen Flächeninhalt F hat die punktierte Fläche (sie besteht aus unendlich vielen Dreiecken)? Dabei habe das äußere Quadrat die Kantenlänge 1. Gesucht ist der **genaue** Flächeninhalt!



Aufgabe 13. Sei $r > 1$ eine reelle Zahl. **Beweise:** Der Punkt $(0|r) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ gehört **nicht** zur Mandelbrotmenge $\mathbb{M}$. (Alle in der Vorlesung bewiesenen Sätze dürfen verwendet werden).

Aufgabe 14. Gesucht sind 12 verschiedene komplexe Zahlen $c_t = \alpha_t + \beta_t i$ mit $\alpha_t, \beta_t \in \mathbb{R}$, für die $c_t^{12} = 1$ gilt (für 6 derartige Zahlen gibt es einen halben Punkt).

t	1	2	3	4	5	6
α_t						
β_t						

t	7	8	9	10	11	12
α_t						
β_t						

Aufgabe 15. Man beweise mit vollständiger Induktion

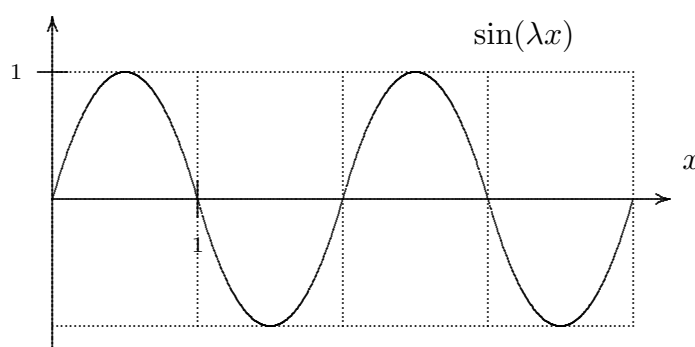
$$\sum_{t=1}^n (2t-1) = n^2.$$

Aufgabe 16. Gesucht ist ein quadratisches Polynom $g(x)$ mit $g(-2) = 1$, so dass die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x} & \text{für } x \geq 0 \\ g(x) & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

differenzierbar ist.

Aufgabe 17. Die Funktion $f(x) = \sin(\lambda x)$ habe folgenden Graphen:



Bestimmen Sie $\int_0^1 f(x) dx$.

Aufgabe 18. Man berechne den durchschnittlichen Umfang von Kreisen mit Radius r mit $2 \leq r \leq 5$. Es ist also $MW(f)$ zu bestimmen, wobei $f(r)$ der Umfang des Kreises mit Radius r ist (dabei sei $2 \leq r \leq 5$).