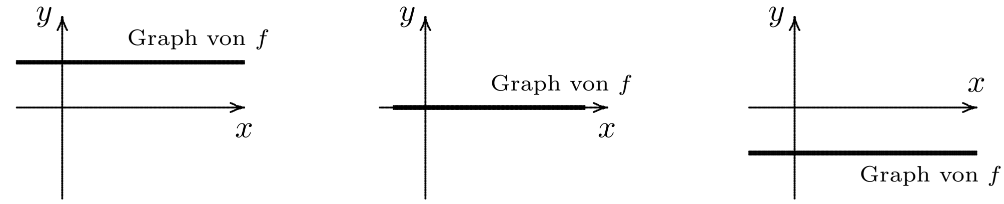
2. Lineare Funktionen.

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *linear,* wenn sie von der Form $x \mapsto a + bx$ mit festen reellen Zahlen a, b ist.

Ist $b = 0$, also $f(x) = a$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so nennt man f eine *konstante* Funktion (mit Wert a). Ist auch noch $a = 0$, also $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so spricht man von der *Nullfunktion.* Für drei Beispiele konstanter Funktionen, nämlich für die Funktionen $f(x) = a$ mit $a = 1, 0, -1$ werden hier die Graphen gezeigt:

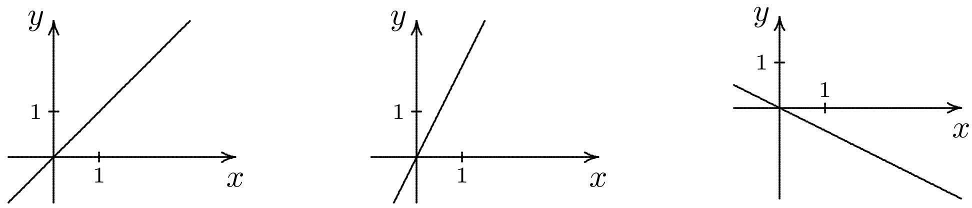


$f(x) = 1$ $\qquad$ $f(x) = 0$ $\qquad$ $f(x) = -1$

Konstante Funktionen sind natürlich recht uninteressant, aber sie werden hie und da auftreten — man kann sie nicht einfach übersehen!

Ist $a = 0$, also $f(x) = bx$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so heißt f *homogen-linear* oder auch *proportionale Zuordnung.* (Dabei wird man meist erwarten, dass $b \neq 0$ gilt, denn sonst handelt es sich ja um die Nullfunktion. Man sollte allerdings immer darauf achten, ob Aussagen auch in Spezialfällen, wie hier $b = 0$, gelten oder nicht.)

2.1. Homogen-lineare Funktionen, also proportionale Zuordnungen. Zuerst betrachten wir homogen-lineare Funktionen, also Funktionen der Form $f(x) = bx$, wobei b eine Konstante ist. Der Graph ist jeweils eine Gerade durch den Ursprung (verschieden von der y-Achse).



$b = 1$ $\qquad$ $b = 2$ $\qquad$ $b = -\frac{1}{2}$

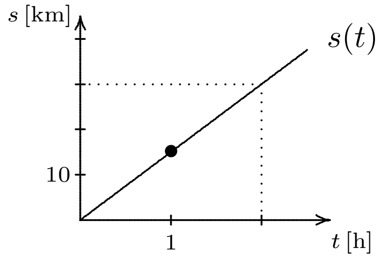
Ist $f(x) = b \cdot x$ eine homogen-lineare Funktion, so nennt man b den *Proportionalitäts-Faktor* (zumindest wenn $b \neq 0$), und man spricht auch von *proportionaler Zuordnung.*

Gibt es eine proportionale Zuordnung $x \mapsto y$, so schreibt man manchmal einfach $y \propto x$.

Hier ein erstes **Beispiel:**

(1) **Gleichförmige Bewegungen**, also Bewegungen mit **konstanter Geschwindigkeit.** Wir betrachten einen Massenpunkt (Mensch, Fahrrad, Auto, Tier), der sich mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt. Als Beispiel wählen wir ein Fahrrad

mit Geschwindigkeit 15 km/h. Das folgende Zeit-Weg-Diagramm beschreibt den zurückgelegten Weg $s(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t:



es handelt sich um den Graphen der Funktion $s(t) = 15\text{km/h} \cdot t$; gestrichelt ist eingetragen, dass bei dieser Geschwindigkeit in 2 h ein Weg der Länge 30 km zurückgelegt wird. Der fette Punkt ist der Punkt (1 | 15). Die Graph der Funktion $s(t)$ ist die Ursprungsgerade durch diesen Punkt.

Manchmal nennt man dies auch ein Weg-Zeit-Diagramm, obwohl in der ersten Koordinatenrichtung (der üblichen x-Achse) die Zeit, und in der zweiten Koordinatenrichtung (der üblichen y-Achse) der Weg eingetragen ist. Wir wollen immer die Reihenfolge der Achsen beachten.
Statt mit Stunden und Kilometern zu arbeiten, sollte man besser mit Grundeinheiten arbeiten, also mit m und sec, und demnach auch die Geschwindigkeit in m/sec angeben. Es ist 1 km/h = 1000 m / 3 600 sec ≈ 0,28 m/sec, demnach gilt: 15 km/h ≈ 4,167 m/sec.

Die Ausbreitung von Schallwellen kann als gleichförmige Bewegung interpretiert werden, die Schallgeschwindigkeit in der Luft ist 343 m/sec.

Die Funktion $s(t)$ ist eine homogen-lineare Funktion, der Proportionalitätsfaktor ist gerade die Geschwindigkeit $b = 15$ km/h (wichtig: ein solcher Proportionalitätsfaktor hat üblicherweise eine **Dimension**, hier eben km/h). Am Funktionsgraphen liest man den Proportionalitätsfaktor (zumindest die Maßzahl) als die **Steigung** der Geraden ab.

Regeln. Sei eine homogen-lineare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Das zugehörige b berechnet man man einfachsten als $b = f(1)$, oder auch als $b = \frac{f(c)}{c}$ für ein beliebiges $c \neq 0$. Wir sehen:

(a) *kennt man für ein einziges $c \neq 0$ den Funktionswert $f(c)$, so kennt man* **alle** *Funktionswerte,* nämlich

$$(*) \qquad f(x) = \frac{f(c)}{c} \cdot x.$$

Man sollte sich dies auch geometrisch verdeutlichen: Eine Gerade durch den Ursprung ist durch jeden ihrer Punkte (mit Ausnahme des Ursprungs) schon eindeutig bestimmt!

(b) *Ist $f(x)$ homogen-linear, so gilt:*

$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x) \qquad \text{für jedes } \lambda \in \mathbb{R}$$
$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

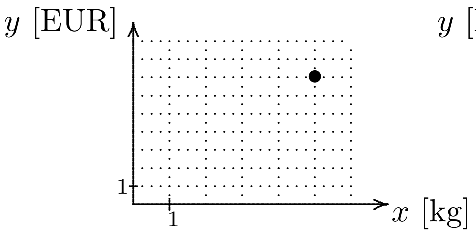
Beweis: Sei etwa $f(x) = bx$ für alle x, so sieht man sofort: $f(\lambda \cdot x) = b \cdot \lambda \cdot x = \lambda \cdot b \cdot x = \lambda \cdot f(x)$, und auch $f(x_1 + x_2) = b(x_1 + x_2) = bx_1 + bx_2 = f(x_1) + f(x_2)$.

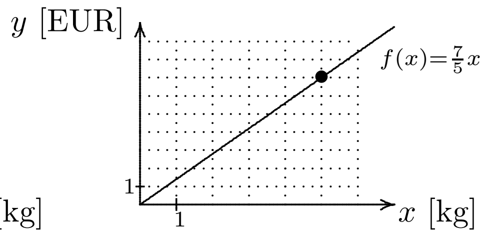
Die Regel $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$ ist äußerst wichtig (verdopple ich x, so verdoppelt sich der Funktionswert; verdreifache ich x, so verdreifacht sich der Funktionswert, usw.). Diese Regel charakterisiert die homogen-linearen Funktionen: *Erfüllt eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diese Regel, so ist f eine homogen-lineare Funktion* (und zwar mit dem Proportionalitäts-Faktor $f(1)$). (Denn die Regel besagt ja gerade $f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = f(1) \cdot x$).

(c) Eine homogen-lineare Funktion $f(x) = bx$ ist genau dann umkehrbar, wenn $b \neq 0$ gilt, die Umkehrfunktion ist dann wieder homogen-linear, und zwar mit Proportionalitätsfaktor $\frac{1}{b}$.

Weitere Beispiele für homogen-lineare Funktionen:

(2) **Dreisatz-Aufgaben** arbeiten mit homogen-linearen Funktionen. Beispiel: 5 kg Reis kosten 7 EUR. Gefragt ist, wieviel man für x kg Reis zahlen muss . Hier handelt es sich um die homogen-lineare Funktion $f(x)$ mit $f(5) = 7$, also $f(x) = \frac{7}{5} \cdot x$ (siehe unser allgemeines Rezept $*$).
Tragen wir den Punkt $(5, 7)$ in ein Koordinatensystem ein (siehe Bild links), so liefert dies unmittelbar den Graph der gesuchten homogen-linearen Funktion: nämlich die Gerade durch diesen Punkt und den Ursprung (siehe Bild rechts).

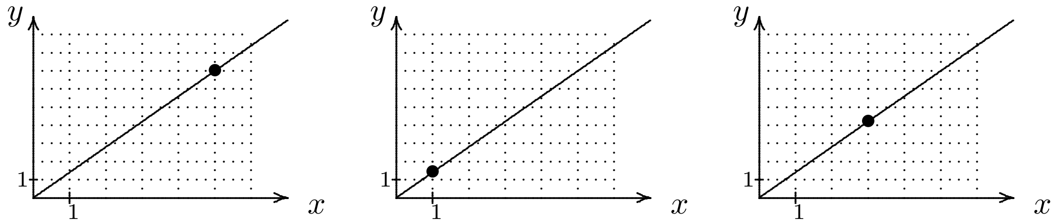




Mit Hilfe diesen Graphen kann man nun für beliebiges x den entsprechenden Preis ablesen.

Das Dreisatz-Schema SATZ 1, SATZ 2, SATZ 3 lässt sich an Hand des Graphen sehr gut nachvollziehen:
SATZ 1: 5 kg Reis kosten 7 EUR. Dies liefert den Punkt $(5 \mid 7)$ und demnach die Ursprungsgerade durch den Punkt $(5 \mid 7)$.
SATZ 2: 1 kg Reis kostet $\frac{7}{5}$ EUR. Hier handelt es sich um den Punkt $(1 \mid \frac{7}{5})$ auf der Geraden.

SATZ 3: 3 kg Reis kosten $\frac{7}{5} \cdot 3$ EUR. Hier handelt es sich um den Punkt $(3 \mid \frac{7}{5} \cdot 3)$ auf der Geraden.



Historische Bemerkung: Dreisatz-Rechnungen findet man schon bei Euklid, *Elemente* II, Buch V, VI.
In Adam Ries: *Rechnung auf der Lini*, Frankfurt (1525) beginnt auf Seite 26 ein Abschnitt **Regula de tri.** Die erste Aufgabe lautet *32 Ellen Tuch kosten 28 Gulden. Was kosten 6 Ellen?*

(3) Die **Prozentrechnung** arbeitet mit homogen-linearen Funktionen. Beispiel: Wir wollen 30% von x EUR ausrechnen. Hier handelt es sich um die homogen-lineare Funktion $f(x)$ mit $f(100) = 30$ (denn $f(100) = 30$), also $f(x) = \frac{3}{10} \cdot x$ (siehe wieder $*$).

(4) Das **Addieren von Prozenten** liefert homogen-lineare Funktionen. Beispiel: Zum Betrag von x EUR sollen 19% Mehrwertsteuer hinzugefügt werden. Die zugehörige Funktion ist $f(x) = 1,19 \cdot x$ (den Proportionalitäts-Faktor $b = 1,19$ erhalten wir zum Beispiel durch $f(100) = 100 + 19 = 119$).

(5) **Geldwechsel,** wie zum Beispiel Dollar in Euro, liefern homogen-lineare Funktionen: x Dollar entsprechen $f(x)$ EUR, dabei ist gegenwärtig $f(x) = 0,6 \cdot x$.

(6) **Umrechnungen** von Messwerten, zum Beispiel Inch in mm, oder Stunden in Sekunden, oder Gallonen in Liter: bei allen diesen Umrechnungen handelt es sich um proportionale Zuordnungen.

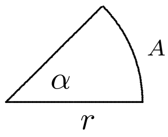
(7) Eine ganz wichtige Umrechnungsformel ist das **Umrechnen eines Winkels vom Gradmaß ins Bogenmaß** und umgekehrt. Das Bogenmaß eines Winkels berechnet sich als die Länge des Kreisbogens geteilt durch den zugehörigen Radius. Im Gegensatz zum Gradmaß ist das Bogenmaß eine dimensionslose Größe; zur Verdeutlichung wird einer Bogenmaß-Angabe manchmal als "Dimension" rad hinzugefügt. Der Gradmaß des Vollkreises ist 360°, das Bogenmaß des Vollkreises ist $2\pi = 2\pi$ rad. Für einen Winkel mit Bogenmaß a und Gradmaß α (hier ist α eine Maßzahl zusammen mit der Maßeinheit °, also zum Beispiel $\alpha = 45°$) gilt

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{a}{2\pi},$$

aufgelöst liefert dies die beiden Formeln:

$$\alpha = \frac{360°}{2\pi} \cdot a \qquad \text{und} \qquad a = \frac{2\pi}{360°} \cdot \alpha.$$

Das Bogenmaß dient vor allem dazu, die Länge von Kreisbögen zu bestimmen: Ist ein Kreisbogen mit Winkel α und Radius r gegeben, und ist a das Bogenmaß des Winkels α,



so ist die Länge A des Kreisbogens gerade

$$A = a \cdot r$$

(8) **Ähnlichkeit in der Geometrie, Strahlensätze.** Es sei ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c gegeben. Für jedes dazu ähnliche Dreieck mit den entsprechenden Seitenlängen a', b', c' gilt $b : a = b' : a'$, also $b' = \frac{b}{a} \cdot a'$, auch dies ist also eine homogen-lineare Zuordnung!

(9) Immer, wenn man es mit einem **Produkt** von Größen zu tun hat, und man alle Größen bis auf eine fixiert, erhält man eine homogen-lineare Funktion. Beispiel: Das Volumen V eines Quaders berechnet sich als $V = L \times B \times H$, dabei ist L die Länge, B die Breite, H die Höhe. Wir fixieren nun zwei der drei Größen, etwa die Länge und die Höhe: wir betrachten also Quader mit fester Länge, sagen wir 20 cm, und fester Höhe, sagen wir 6 cm. Dann ist das Volumen in Abhängigkeit von B durch $V(B) = 20 \times B \times 6$, also durch eine homogen-lineare Funktion, gegeben (besser: $V(B) = 20\ \text{cm} \times B \times 6\ \text{cm}$, der Proportionalitäts-Faktor ist also 120 cm^2).

(10) Arbeitet man mit einer **Landkarte mit Maßstab** 1:10 000, so bedeutet dies, dass zum Beispiel 1 cm auf der Landkarte 10 000 cm (= 100 m) in der Natur entsprechen. Hier handelt es sich also um die homogen-lineare Funktion $f(x) = \lambda \cdot x$ mit dem Proportionalitätsfaktor $\lambda = 10\,000$.

(11) **Volumen und Masse.** Die Masse einer Flüssigkeit ist proportional zum Volumen.

(12)* **Hebelgesetz.** Es lautet: Kraft mal Kraftarm = Last mal Lastarm.

(13)* **Hooke'sches Gesetz.** Die Ausdehnung einer Spiralfeder ist proportional zur Kraft.

(14)* **Elektrischer Strom.** Für jeden elektrischen Leiter gilt: Die Spannung ist proportional zur Stromstärke ($U = R \cdot I$).

(15)* **Fehlerrechnung.** Die meisten Messwerte, die man erhält, sind ungenau und man versucht, den jeweiligen Fehler abzuschätzen. Misst man zum Beispiel eine Strecke von 10 m mit einem 1 Metermaß, so kann man erwarten, dass man jeweils auf 1 mm genau abliest. Da man 10 mal abliest, ergibt sich insgesamt also als Gesamtfehler höchstens das 10-fache: der wahre Wert wird zwischen 9,99 m und 10,01 m liegen. Statt des absoluten Fehlers (hier 1 mm) gibt man meist den *relativen Fehler* an, dies ist der Quotient (absoluter Fehler)/(Messgröße), in unserem Fall ist der relative Fehler also: 1 mm / 1 m = 1/1000 = 0,1 %.

Der jeweilige Proportionalitätsfaktor. Ist eine proportionale Zuordnung gegeben, so ist die wesentliche Merkzahl natürlich der zugehörige Proportionalitätsfaktor, also die Steigung der Geraden.

- im Beispiel (1) ist es die Geschwindigkeit,
- im Beispiel (3) der Prozentsatz,
- im Beispiel (5) der Wechselkurs,
- im Beispiel (10) der Maßstab,
- im Beispiel (11) die Dichte,
- im Beispiel (14) der Widerstand.

Hier ein weiteres Beispiel einer proportionalen Zuordnung, bei der man sieht, dass es universelle Konstanten gibt, die als derartige Proportionalitätskonstanten auftreten:

(16) Kreise mit gleichem Durchmesser haben natürliche den gleichen Umfang. Wir können also eine Funktion $U\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definieren, wobei für jedes $x \in \mathbb{R}^+$, der Wert $U(x)$ gerade die Länge des Kreises mit Durchmesser x ist. Dann ist $U(x) = \pi x$, man erhält also eine proportionale Zuordnung mit Proportionalitätsfaktor $\pi = 3,14....$

Man beachte: Während es sich bei den proportionalen Zuordnungen um Funktionen (also etwas eigentlich sehr Kompliziertes) handelt, ist der Proportionalitätsfaktor einfach nur eine **Zahl**.

Wir haben gesehen: Ein Großteil der SI-Mathematik, ja der Mathematik, die im SI-Unterricht eine Rolle spielt (in Physik, in Erdkunde), basiert auf proportionalen Zuordnungen.

Proportionale Zuordnungen werden im SI-Unterricht oft verwendet, um ein erstes Verständnis für Funktionen zu erzeugen. Die Schüler führen eine Reihe von Messungen durch und stellen dabei fest, dass sich ein offensichtlicher funktionaler Zusammenhang durch einen einfachen Term beschreiben lässt.
Typische Beispiele:
Beispiel (15): Man vergleicht Durchmesser und Umfang verschiedener Kreise (also zum Beispiel von Dosen).
Beispiel (13): Hebelgesetz.
Beispiel (14): Hooke'sches Gesetz.
Der MATHE-KOFFER bietet notwendige Materialien und zugehörige Übungsblätter.

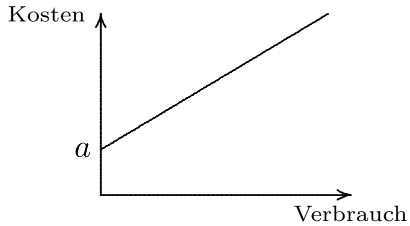
Tabelle. Tabellen zu proportionalen Zuordnungen gibt es immer wieder. So verteilen Banken und Wechselstuben Tabellen zur Umrechnung von Währungen.

Graph. Wie wir gesehen haben, ist der Graph der homogen-linearen Funktion $f(x) = bx$ die Ursprungsgerade durch den Punkt $(1 \mid b)$. Betrachtet man die gesamte Funktionenschar mit b als Parameter, so erhält man als Funktion in den zwei Variablen x, b gerade die Funktion $F(x, b) = bx$, die wir als Hauptbeispiel im Abschnitt 1.2 betrachtet haben.

2.2. Lineare Funktionen.

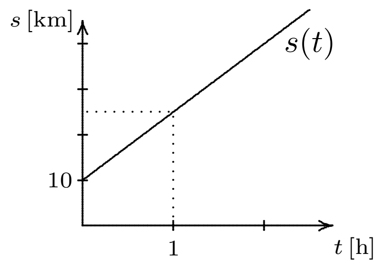
Beispiele:

(1) Zahlung: **Grundgebühr und Verbrauch.** Bei manchen Zahlungen zahlt man neben dem verbrauchsabhängigem Betrag noch eine festen Grundgebühr.



Hier ist a die Grundgebühr. Die monatliche Zahlung für elektrischen Strom kann folgendermaßen aussehen: man zahlt eine feste Grundgebühr, zum Beispiel 8 EUR, und zusätzlich 0,20 EUR pro kWh.

(2) Wir betrachten wieder eine **gleichförmige Bewegungen**, also eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, sagen wir eines Fahrrads mit Geschwindigkeit 15 km/h. In Abschnitt 2.1 haben wir ein Koordinatensystem verwendet, bei dem sich das Fahrrad zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Stelle $s = 0$ befindet und haben gesehen, dass dann die zugehörige Funktion $s(t)$ homogen-linear ist: in unserem Beispiel ist $s(t) = 15t$. Nun wollen wir annehmen, dass sich das Fahrrad zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Stelle $s = a$ (also a km entfernt von der Stelle $s = 0$ (.und zwar in Fahrtrichtung). Das zugehörige Zeit-Weg-Diagramm hat für $a = 10$ die folgende Form



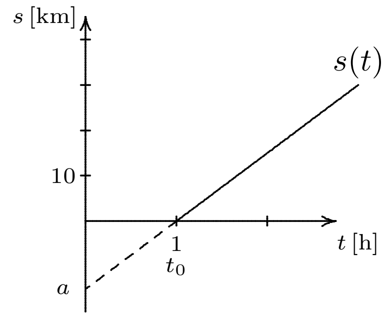
gestrichelt ist eingezeichnet, dass sich der Fahrradfahrer zum Zeitpunkt $t = 1$ (also nach einer Stunde) an der Stelle $s = 25$ befindet. Die zugehörige Funktionsgleichung lautet

$$s(t) = 15t + 10$$

Nehmen wir dagegen an, dass sich der Fahrradfahrer zum Zeitpunkt t_0 an der Stelle $s = 0$ befindet, so lautet die Funktionsgleichung

$$s(t) = 15(t - t_0),$$

für $t_0 = 1$ ergibt sich folgender Graph:

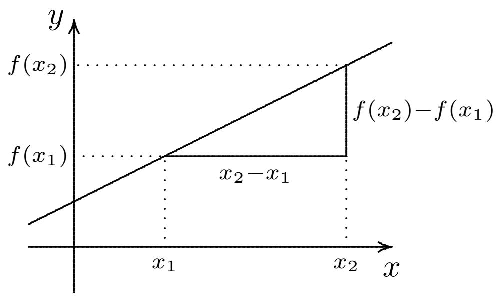


gestrichelt ist, was vor dem Zeitpunkt t_0 passiert ist, insbesondere sehen wir, dass sich zum Zeitpunkt $t = 0$ der Fahrer an der Position $a = -bt_0$ befand (b ist die Geschwindigkeit).

(3) **Temperatur.** Umrechnung der Temperatur von Celsius in Fahrenheit liefert die lineare Funktion $f(x) = 1,8x + 32$, dabei ist x^o die Temperatur in Celsius, $f(x)^o$ die Temperatur in Fahrenheit. (Es ist $f(0) = 32$ und $f(-40) = -40$, mit diesen beiden Angaben berechnet man problemlos den Funktionsterm.)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine lineare Funktion. Wie berechnet man die Zahlen a und b, für die $f(x) = a + bx$ gilt? Wir brauchen jetzt die Funktionswerte für **zwei** verschiedene Zahlen x_1, x_2. Dann können wir b mit Hilfe eines **Steigungsdreiecks** berechnen:

$$b = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$



Die Steigung b ist also der Quotient aus der Differenz der Funktionswerte (im Bild: die "Höhendifferenz") geteilt durch die Differenz der gegebenen Werte (die "Längendifferenz").

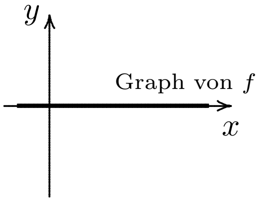
Hat man b, so erhält man a durch

$$a = f(x_1) - b \cdot x_1,$$

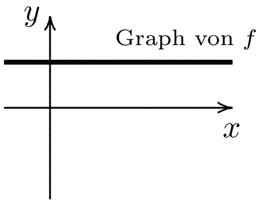
dabei ist x_1 eine beliebige reele Zahl, also ein beliebiger Punkt auf der x-Achse.

Nullstellen. Sei $f(x) = a + bx$. Es gibt verschiedene Verhaltensweisen! Man muss drei Fälle unterscheiden:

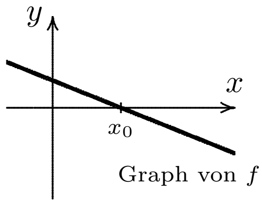
- Fall 1: Die Funktion f ist die Nullfunktion, also $a = b = 0$. In diesem Fall ist jedes $x \in \mathbb{R}$ Nullstelle.
- Fall 2: Die Funktion f ist konstant, aber nicht die Nullfunktion. Also $a \neq 0,\ b = 0$. In diesem Fall gibt es keine einzige Nullstelle.
- Fall 3: Die Funktion f ist nicht konstant, also $b \neq 0$. In diesem Fall gibt es genau eine Nullstelle, nämlich $x_0 = -\frac{a}{b}$.



Fall 1



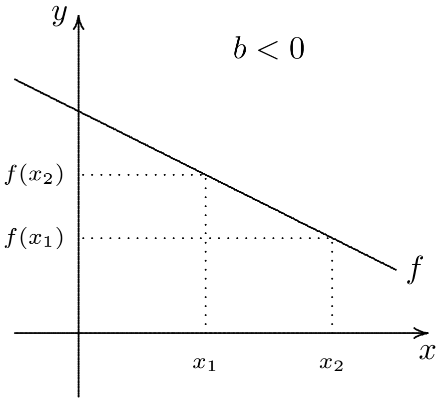
Fall 2



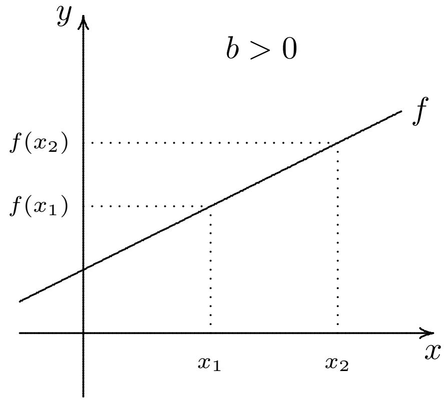
Fall 3

Nicht-konstante lineare Funktionen. Die Steigung b einer solchen Funktion f ist von Null verschieden, also entweder negativ oder positiv. Diese Unterscheidung liefert völlig verschiedene Verhaltensweisen:

(i) Strenge Monotonie. Ist $b > 0$, so ist f streng monoton wachsend (d.h.: Ist $x_1 < x_2$, so ist $f(x_1) < f(x_2)$). Ist $b < 0$, so ist f streng monoton fallend (d.h.: Ist $x_1 < x_2$, so ist $f(x_1) < f(x_2)$).

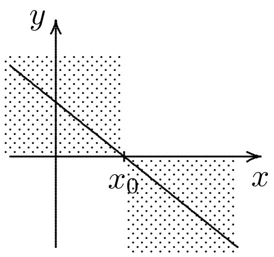


streng monoton fallend

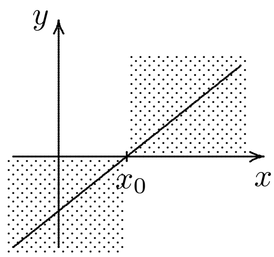


streng monoton wachsend

(ii) Werteverteilung. Sei f wieder eine nicht-konstante lineare Funktion mit Steigung b, also $b \neq 0$. Es gibt die beiden wesentlich verschiedenen Fälle $b < 0$ und $b > 0$.



$b < 0$



$b > 0$

In beiden Fällen gilt: Die Funktion f besitzt genau eine Nullstelle x_0.

- Ist $b < 0$ so ist $f(x) > 0$ für alle x links von x_0 und $f(x) < 0$ für alle x rechts von x_0.
- Ist $b > 0$ so ist $f(x) < 0$ für alle x links von x_0 und $f(x) > 0$ für alle x rechts von x_0.

Umkehrfunktion. Sei $f(x) = a + bx$ eine lineare Funktion. Wir unterscheiden wieder, ob f konstant ist oder nicht. Ist f konstant, also $b = 0$, so ist f weder injektiv noch surjektiv, also gibt es keine Umkehrfunktion. Ist dagegen f nicht konstant, also $b \neq 0$, so ist f injektiv und surjektiv und die **Umkehrfunktion** f^{-1} berechnet sich folgendermaßen:

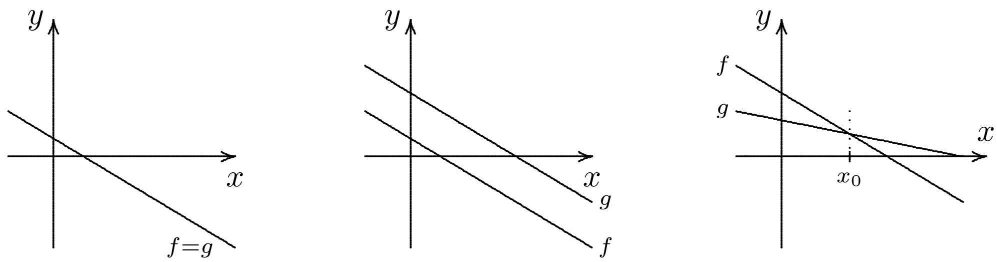
$$f^{-1}(x) = -\tfrac{a}{b} + \tfrac{1}{b}x.$$

Insbesondere ist also die Steigung der Umkehrfunktion gerade $\frac{1}{b}$.

Graph. *Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade, die nicht zur y-Achse parallel ist.* Und umgekehrt: *Jede derartige Gerade ist Graph einer linearen Funktion.*

Schnittpunkte. Seien f, g lineare Funktionen. Frage: Wann gibt es $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = g(x_0)$? Um diese Aufgabe zu lösen, betrachtet man die Funktion $f - g$ und sucht deren Nullstellen. Nun ist $f - g$ wieder eine lineare Funktion, wir wissen also, dass $f - g$ entweder keine, oder genau eine, oder unendlich viele Nullstellen hat. Sei $f(x) = a + bx$, und $g(x) = a' + b'x$. Es gibt die folgenden drei Möglichkeiten:

- Fall 1: Die Funktion $f - g$ ist die Nullfunktion, also $f = g$: die beiden Geraden stimmen überein. Dies ist der Fall $a = a', b = b'$.
- Fall 2: Die Funktion $f - g$ ist konstant, aber nicht die Nullfunktion. Sei etwa $f - g = c$ für eine Zahl $0 \neq c \in \mathbb{R}$. Es ist also $f(x) = g(x) + c$ für alle $x \in \mathbb{R}$; die beiden Geraden sind parallel, besitzen also keinen Schnittpunkt. Dies ist der Fall $a \neq a'$, $b = b'$.
- Fall 3: Die Funktion $f - g$ ist nicht konstant. In diesem Fall gibt es genau einen Schnittpunkt. Dies ist der Fall $b = b'$.

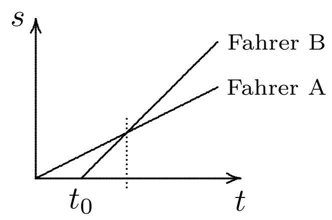


Fall 1 Fall 2 Fall 3

Beispiel-Aufgaben:

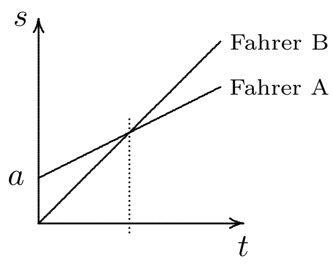
(1) **Eine Verfolgungsjagd.** Zwei Radfahrer A und B fahren auf der gleichen Strecke, aber mit verschiedenen Geschwindigkeiten, sie starten am gleichen Punkt, aber zu

unterschiedlichen Zeiten: Fahrer A fährt mit Geschwindigkeit 15 km/h, Fahrer B mit Geschwindigkeit 20 km/h. Der Fahrer B startet eine halbe Stunde nach dem Fahrer A. Frage: Wann überholt B den Fahrer A ?



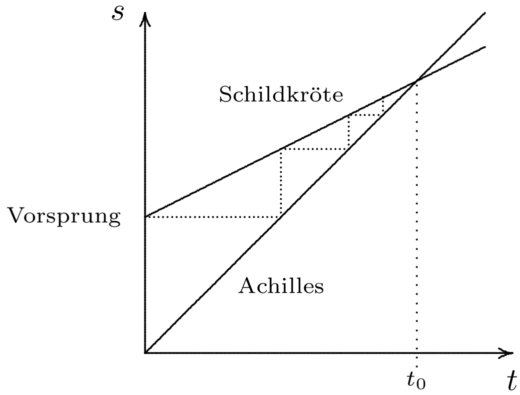
Hier ist $t_0 = \frac{1}{2}$ der zeitliche Verzug, mit dem der Fahrer B startet.

(2) **Noch eine Verfolgungsjagd.** Diesmal startet B, wenn der Fahrer A schon 10 km zurückgelegt hat.



Hier ist $a = 10$ km der Vorsprung, den der Fahrer A hat.

Achilles und die Schildkröte. Eine Situation wie in (2) wurde von Zeno, einem griechischen Philosophen, als Paradox angesehen. *Vier aber sind Zenons Sätze über Bewegung, die in Schwierigkeiten verwickeln die Lösenden. … Der zweite, der sogenannte Achilles: Er besteht darin, dass das Langsamere nie eingeholt werden wird im Laufen von dem Schnelleren. Denn vorher muss dahin kommen das Verfolgende, wovon auslief das Fliehende: so dass stets etwas voraus haben muss das Langsamere.* (Aristoteles: *Physik.* Buch VI, Kapitel 9). Behauptet wird also, dass Achilles (ein Schnellläufer) eine Schildkröte niemals einholen kann, falls diese zu Beginn des Laufes nur irgendeinen Vorsprung hat. Denn hat Achilles den ursprünglichen Ort der Schildkröte erreicht, ist diese inzwischen zu einem neuen Ort weitergekrochen, hat er jenen erreicht, ist die Schildkröte abermals weitergekrochen usw.



Natürlich überholt Achilles die Schildkröte, und zwar zum Zeitpunkt t_0.

Tabelle. Ist f eine lineare Funktion, und tabelliert man die Werte

$$f(0), f(1), f(2), \ldots,$$

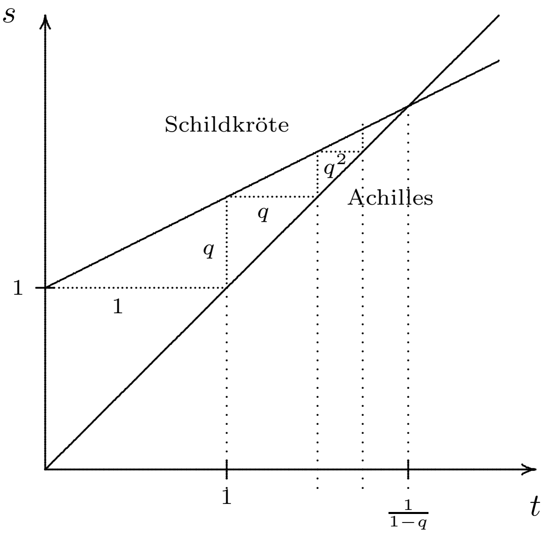
so erhält man eine **arithmetische Folge:** Ist etwa $f(x) = a + bx$, so erhält man die Folge

$$a, \quad a+b, \quad a+2b, \quad a+3b, \quad \ldots.$$

Auch **geometrische Folgen** treten beim Studium linearer Funktionen in Erscheinung. Betrachten wir eine Verfolgungsjagd wie zwischen Achilles und der Schildkröte, mit den beiden Funktionen

$$f(x) = x \quad \text{(Achilles)}$$
$$g(x) = qx + 1 \quad \text{(Schildkröte)},$$

dabei sei $0 < q < 1$. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist der Punkt $(\frac{1}{1-q} \mid \frac{1}{1-q})$. Es handelt sich also um folgende Situation:



Auf der x-Achse sehen wir Abschnitte der Länge

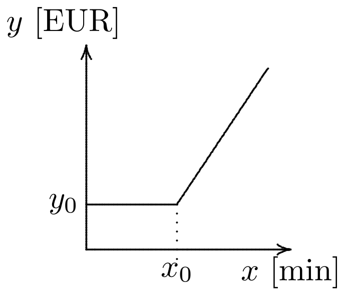
$$1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ \ldots,$$

deren Summe die Länge $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$ liefert.

2.3. Stückweise lineare Funktionen.

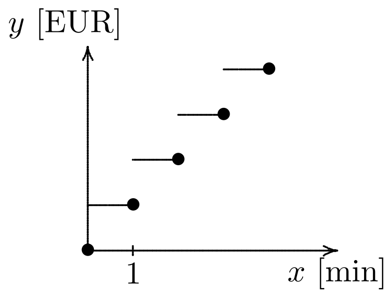
Hier gibt es keine Theorie, sondern nur **Beispiele.**

(1) Telefonieren mit **Grundgebühr und Freiminuten.**



Hier ist y_0 die Grundgebühr, x_0 sind die Freiminuten.

(2) Preis von Telefonaten, wenn pro angefangener Minute ein **Minutenpreis** zu zahlen ist:

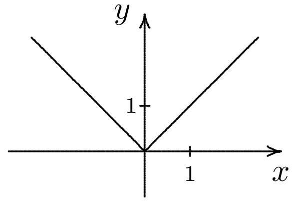


Die fetten Punkte wie an der Stelle $(1 \mid 1)$ weisen darauf hin, dass dies Punkte des Graphen sind; es ist also $f(1) = 1$ und nicht etwa $f(1) = 2$.

(3) Die **Betragsfunktion** $|r|$**.** Für $r \in \mathbb{R}$ ist

$$|r| = \begin{cases} r & \text{falls } r \geq 0 \\ -r & \text{falls } r < 0. \end{cases},$$

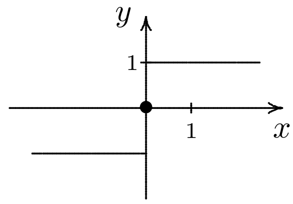
der Graph dieser Funktion hat folgendes Aussehen:



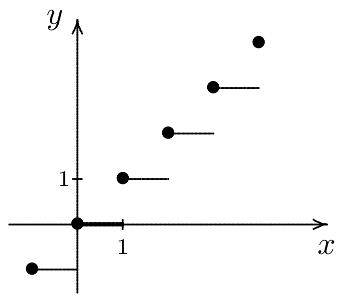
(4) Die **Signums-Funktion** σ. Man setzt

$$\sigma(r) = \begin{cases} -1 & \\ 0 & \text{falls} \\ 1 & \end{cases} \begin{matrix} r < 0 \\ r = 0 \\ r > 0. \end{matrix}$$

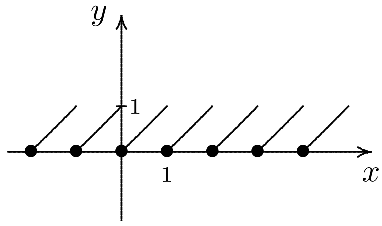
für alle $r \in \mathbb{R}$. Der Graph sieht also folgendermaßen aus:



(5) Die Funktion **ganzzahliger Anteil**. Jeder reellen Zahl r werde die größte ganze Zahl z mit $z \leq r$ zugeordnet, man nennt z den ganzzahligen Anteil von r und schreibt $[r] = z$. So ist zum Beispiel $[\pi] = [3,14...] = 3$, und $[-\frac{1}{2}] = -1$. Für jede ganze Zahl r ist natürlich $[r] = r$.



(6) Die Funktion **Bruchanteil.** Hier betrachtet man die Funktion $r \mapsto r - [r]$.



2.4. Lineares Skalieren.

Betrachtet man den Graphen einer Funktion, so wird man häufig versuchen, die Achsen geeignet zu skalieren. Dafür stehen vier verschiedene Operationen zur Verfügung:

- Vertikale Verschiebung
- Horizontale Verschiebung
- Proportionale Änderung vertikal
- Proportionale Änderung horizontal

Diese vier Operationen sollen zuerst einzeln analysiert werden. Wir betrachten einige wichtige Funktionen, nämlich die Normalparabel $f(x) = x^2$, die Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x)$ (sie spielt bei der Beschreibung von Wachstumsprozessen eine wichtige Rolle), die Sinus-Funktion $f(x) = \sin(x)$ (zur Beschreibung periodischer Vorgänge) und schließlich eine "logistische" Funktion (auch sie wird bei Wachstumsprozessen herangezogen, und zwar bei beschränktem Wachstum). Wir skizzieren die Veränderungen, die jeweils auftreten. Um die Veränderungen beim Schieben, Strecken und Stauchen besser verfolgen zu können, haben wir jeweils einen Punkt des Graphen durch einen fetten Punkt • markiert.

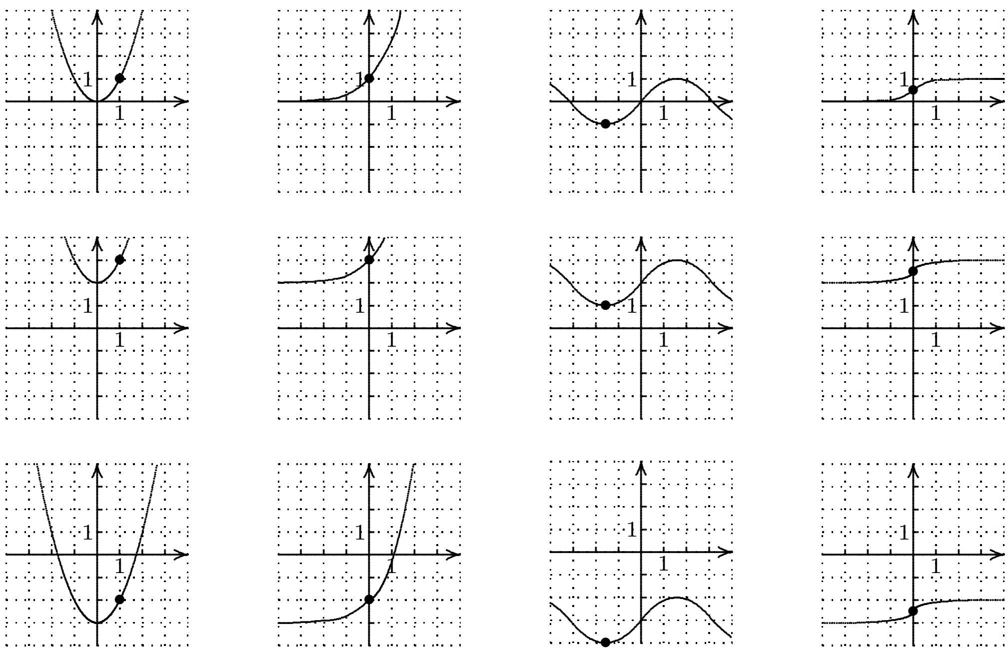
- **Vertikale Verschiebung**

Das Bild der Kurve $f(x)$ soll vertikal (nach oben oder unten) verschoben werden, hier unsere vier Testfunktionen, dabei wurden diese Graphen in der zweiten Reihe um 2 Einheiten nach oben, in der dritten um 3 Einheiten nach unten verschoben: wir erhalten zum Beispiel aus $f(x) = x^2$ durch Verschiebung um zwei Einheiten nach oben die Funktion $g(x) = x^2 + 2$, durch Verschieben um drei Einheiten nach unten die Funktion $h(x) = x^2 - 3$.

$f(x)$

$f(x)+2$

$f(x)-3$

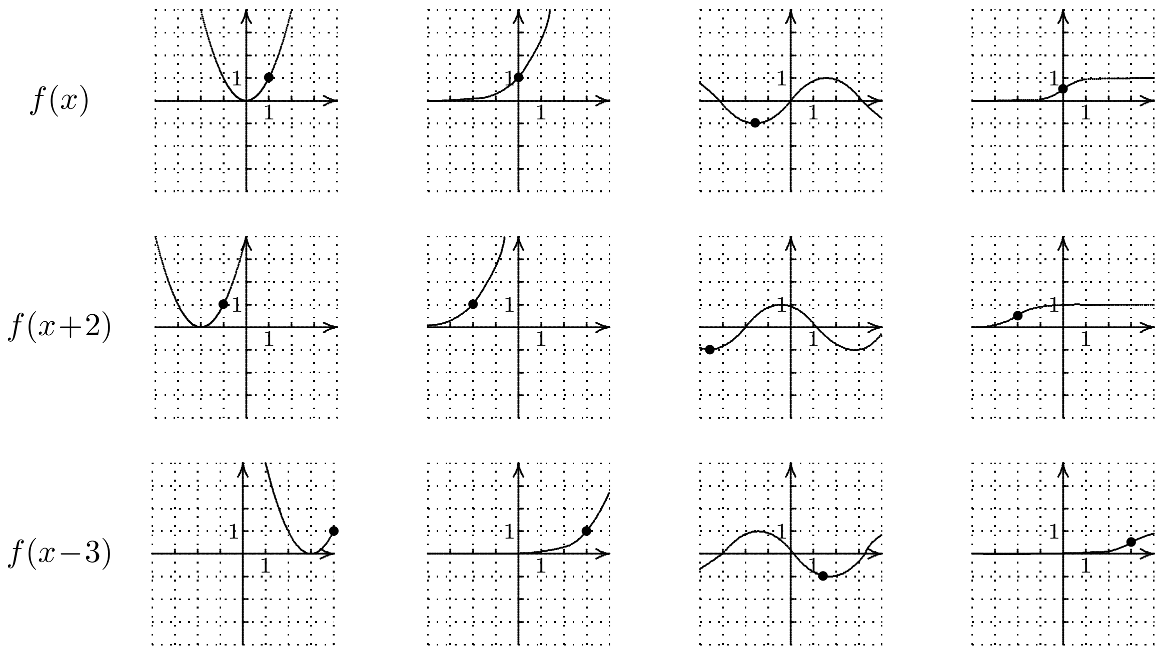


Merkregel: Der Graph der Funktion $f(x)+b$ (mit $b \in \mathbb{R}$) entsteht aus demjenigen von $f(x)$ durch vertikales Verschieben:

Ist b positiv, so handelt es sich um ein Verschieben nach oben.
Ist b negativ, so handelt es sich um ein Verschieben nach unten.

- **Horizontale Verschiebung (Phasen-Verschiebung)**

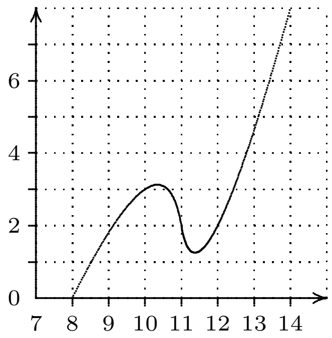
Das Bild der Kurve $f(x)$ wird jetzt horizontal (also nach links oder rechts) verschoben, hier wieder unsere vier Testfunktionen, dabei haben wir diese Graphen in der zweiten Reihe um 2 Einheiten nach links, in der dritten Reihe um 3 Einheiten nach rechts verschoben: wir erhalten zum Beispiel aus $f(x) = x^2$ durch Verschiebung um zwei Einheiten nach links die Funktion $g(x) = (x+2)^2$, durch Verschieben um drei Einheiten nach rechts die Funktion $h(x) = (x-3)^2$.

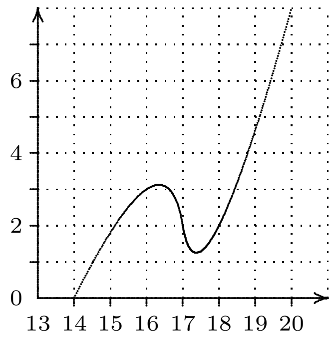


Merkregel: Der Graph der Funktion $f(x+d)$ (mit $d \in \mathbb{R}$) entsteht aus demjenigen von $f(x)$ durch horizontales Verschieben:
Ist d positiv, so handelt es sich um ein Verschieben nach **links.**
Ist d negativ, so handelt es sich um ein Verschieben nach **rechts.**

Beispiel. Beobachter in New York und in Bielefeld verfolgen gleichzeitig ein Experiment (Satellitenstart, Olympische Spiele, Laborversuch, etc). Die Zeitdifferenz betrage 6 Stunden. Das linke Bild zeigt die Werte in Abhängigkeit von der Ortszeit in

New York, das rechte die gleichen Werte in Abhängigkeit von der Ortszeit in Bielefeld.





In der Elektrotechnik (aber auch sonst) nennt man zwei Kurven *phasenverschoben,* wenn sie durch horizontale Verschiebung auseinander hervorgehen. Typisches Beispiel:

$$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}).$$

Vorschau. Eine Funktion $f(x)$ heißt *periodisch* mit Periode p, wenn

$$f(x+p) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

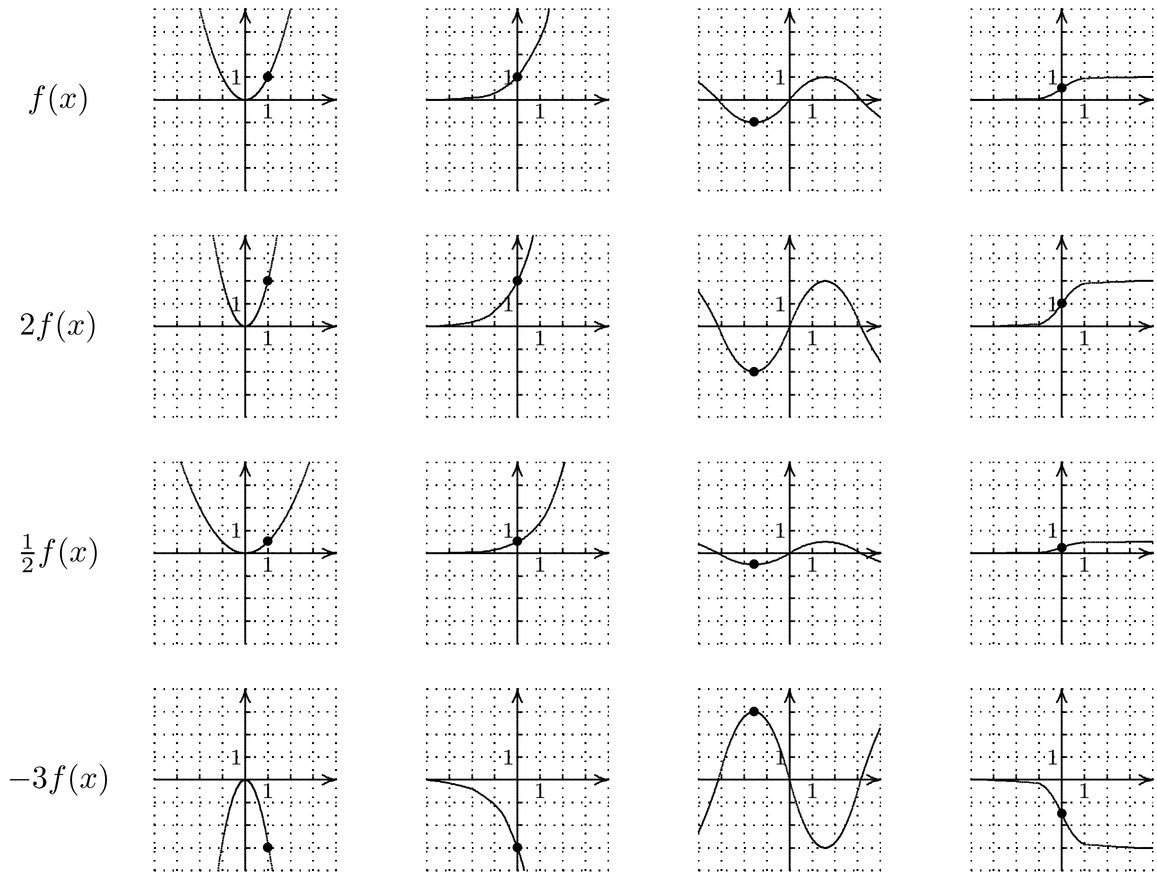
gilt (dabei sei p eine feste positive Zahl). Dies bedeutet, daß die vertikale Verschiebung um p die Funktion in sich überführt. Typische Beispiele periodischer Funktionen sind Sinus und Cosinus (beide mit Periode 2π). In der Biologie arbeitet man häufig mit periodischen Funktionen (Beispiele sind der Pulsschlag, aber auch Vorgänge mit längeren Perioden, wie etwa solche, die sich täglich oder jährlich wiederholen). Wir werden uns damit im Abschnitt 7 beschäftigen. Hier soll aber schon auf folgendes hingewiesen werden: Sei $f(t)$ eine Funktion, wobei t eine Zeitvariable ist ($f(t)$ beschreibt also einen Vorgang in Abhängigkeit von der Zeit). Ist $f(t)$ periodisch mit Periode p (der Vorgang wiederholt sich also jeweils nach der Zeit p), so nennt man den Kehrwert $\frac{1}{p}$ die *Frequenz:* die Frequenz beschreibt demnach die "Häufigkeit der Wiederholung pro Zeiteinheit".

- **Vertikale Streckung oder Stauchung (Änderung der Amplitude)**

Das Bild der Kurve $f(x)$ soll vertikal gestreckt oder gestaucht werden, es wird also $f(x)$ mit einer festen Zahl $a \neq 0$ multipliziert. Sechs verschiedene Verhaltensweisen sind zu unterscheiden:
Ist $a > 1$, so erscheint der Graph in y-Richtung gestreckt; der jeweilige Abstand von der x-Achse vergrößert sich.
Ist $0 < a < 1$, so erscheint der Graph in y-Richtung gestaucht; der jeweilige Abstand von der x-Achse verkleinert sich.
Ist $a = 1$, so ändert sich natürlich nichts, ist dagegen $a = -1$, so wird der Graph an der x-Achse gespiegelt.

Ist $a < -1$, so erscheint der Graph in y-Richtung gestreckt und zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.
Ist $-1 < a < 0$, so erscheint der Graph in y-Richtung gestaucht und zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.

Hier wieder unsere Testfunktionen $f(x)$, darunter $2f(x)$, darunter $\frac{1}{2}f(x)$, schließlich noch $(-3) \cdot f(x)$.

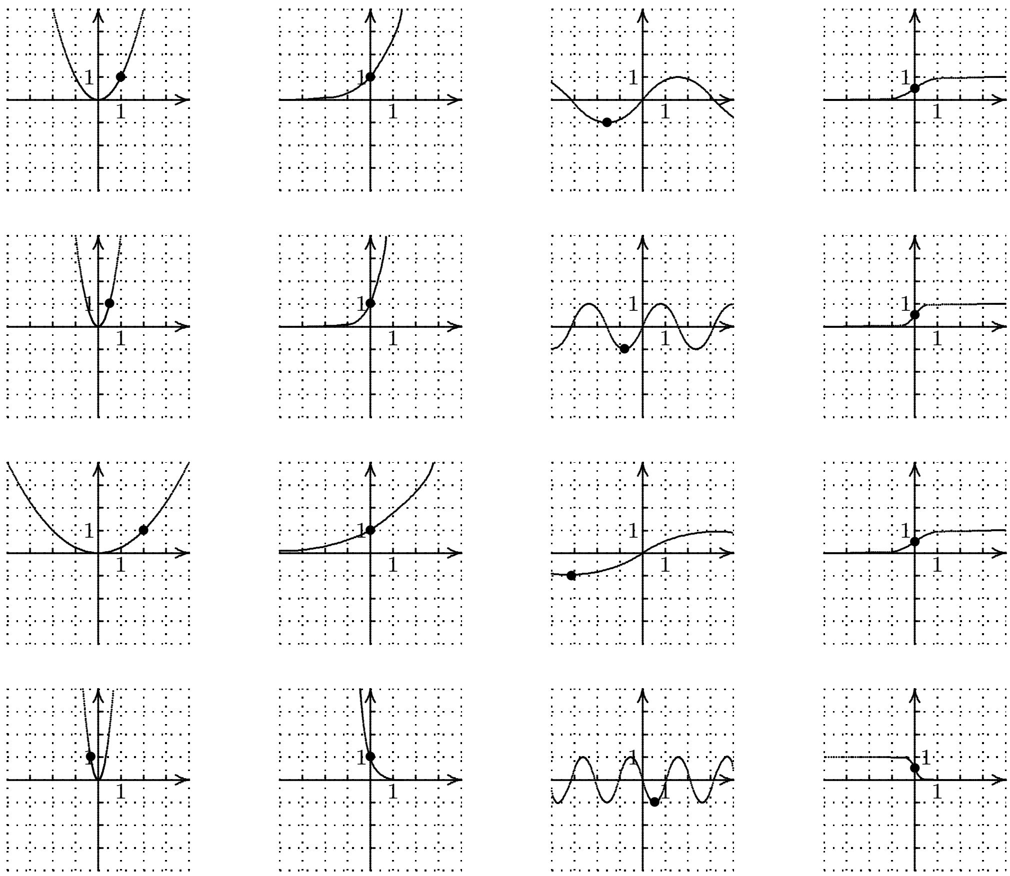


Im Fall der Sinusfunktionen $a \cdot \sin(x)$ (das jeweils dritte Bild) nennt man die maximale Auslenkung nach oben und unten (also den Betrag $|a|$ von a) die **Amplitude.** *Eine vertikale Streckung oder Stauchung ändert also gerade die Amplitude.*

- **Horizontale Streckung oder Stauchung (Änderung der Frequenz)**

Als letztes soll nun das Bild der Kurve $f(x)$ horizontal gestreckt oder gestaucht werden, es wird also das x in $f(x)$ durch ein skalares Vielfaches, sagen wir cx (c eine von Null verschiedene reelle Zahl) ersetzt. Auch hier sind wieder sechs verschiedene Verhaltensweisen zu unterscheiden:
Ist $c > 1$, so erscheint der Graph in x-Richtung **gestaucht**.
Ist $0 < c < 1$, so erscheint der Graph in x-Richtung **gestreckt**.
Ist $c = 1$, so ändert sich wieder nichts, ist dagegen $c = -1$, so wird der Graph an der y-Achse gespiegelt.

Ist $c < -1$ so erscheint der Graph in x-Richtung gestaucht und zusätzlich an der y-Achse gespiegelt.
Ist $-1 < c < 0$ so erscheint der Graph in x-Richtung gestreckt und zusätzlich an der y-Achse gespiegelt.



$f(x)$

$f(2x)$

$f(\frac{1}{2}x)$

$f(-3x)$

Die obigen Graphen sind wieder unsere vier Testfunktionen, und zwar zuerst $f(x)$, darunter $f(2x)$, darunter $f(\frac{1}{2}x)$, schließlich noch $f(-3x)$.

Vorschau. Im Abschnitt 7 werden wir uns den periodischen Funktion zuwenden. Die Funktion $f(t) = \sin(t)$ beschreibt eine Schwingung in Abhängigkeit von der Zeit t, zum Beispiel gemessen in Sekunden. Dann erfolgt pro 2π [sec] eine vollständige Schwingung, die Funktion $\sin(t)$ hat also die Periode 2π [sec] und demnach die Frequenz $\frac{1}{2\pi}$ $[\mathrm{sec}]^{-1}$. Bei $f(t) = \sin(ct)$ erfolgt pro $\frac{2\pi}{c}$ Sekunden eine volle Schwingung, $\sin(ct)$ hat also die Periode $\frac{2\pi}{c}$ [sec] und die Frequenz $\frac{c}{2\pi}$ [Hz]. *Die horizontalen Streckungen und Stauchungen liefern also gerade Änderungen der Frequenz.*

Das Zusammenspiel dieser vier Operationen.
Mit Hilfe der vier genannten Operationen erhält man aus der Funktion $f(x)$ Funktionen der Form

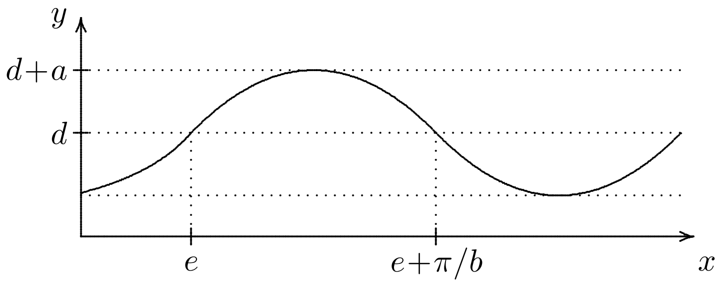
$$g(x) = af(bx + c) + d \qquad (*)$$

(mit reellen Zahlen a, b, c, d); man nennt diesen Vorgang *lineares Skalieren.* Umgekehrt besagt dies: Funktionen der Form $(*)$ sind eigentlich nicht komplizierter als solche der Form $f(x)$. Die beiden Parameter c, d beschreiben das horizonale Verschieben (= Phasenverschiebung) und die Änderung der Frequenz. Statt hier $cx + d$ zu schreiben, also zuerst die Frequenz zu ändern und danach die Phasenverschiebung durchzuführen), kann es sinnvoll sein, $b(x - e)$ zu schreiben (mit $e = -\frac{c}{b}$), also zuerst die Phasenverschiebung zu betrachten und danach die Frequenz zu ändern. Dabei haben wir hier ein Minuszeichen verwandt, weil dies die Richtung des Verschiebens besser beschreibt. Welche dieser Vorgehensweisen sinnvoll ist, hängt vom Einzelfall ab. Immer haben wir also die Möglichkeit, die Funktion $(*)$ in der Form

$$g(x) = af(b(x - e)) + d$$

zu schreiben.

Ist etwa $f(x) = \sin(x)$, so liest man mögliche Parameter a, b, d, e am Graphen von $g(x) = af(b(x - e)) + d$ mühelos ab:



Oszillograph. In den Naturwissenschaften und der Medizin werden zeitabhängige Funktionen häufig durch einen Oszillographen aufgezeichnet (Bildschirm oder Ausdruck). Zum Justieren des Graphen gibt es vier Knöpfe, die gerade den vier genannten Operationen entsprechen:

- Vertikale Verschiebung.
- Horizontale Verschiebung, man spricht hier von *Phasenverschiebung.*
- Proportionale Änderung vertikal: Änderung der *Amplitude.*
- Proportionale Änderung horizontal: Änderung der *Frequenz.*

Die typischen Funktionen, die man bei der Verwendung eines Oszillographen erwartet, sind "oszillierende" Funktionen, also solche, die ähnlich zur Sinusfunktion sind.