4. Quadratische Funktionen.

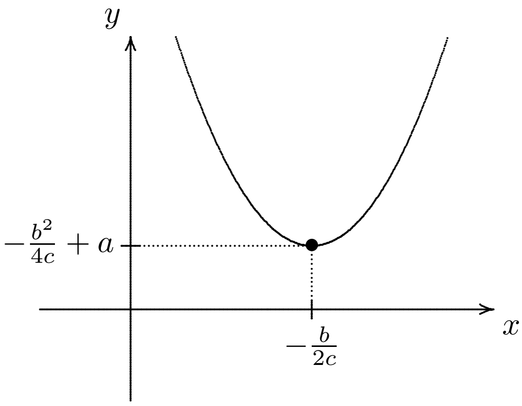
4.1. Skalierung, Nullstellen. Eine **quadratische** Funktion ist von der Form

$$f(x) = cx^2 + bx + a$$

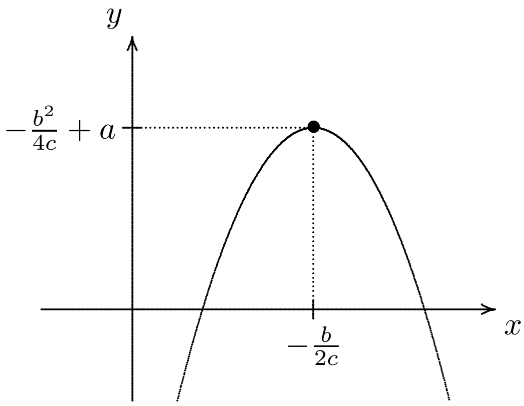
mit reellen Zahlen a, b, c; ist $c \neq 0$, so sprechen wir von einer *echten* quadratischen Funktion. Typisches Beispiel ist die "Normalparabel" $f(x) = x^2$. *Jede echte quadratische Funktion entsteht aus der Normalparabel duch lineares Skalieren,* denn

$$cx^2 + bx + a = c\Big(x + \frac{b}{2c}\Big)^2 + \Big(-\frac{b^2}{4c} + a\Big)$$

Dies nennt man die **Scheitelpunktsgleichung der Parabel**, denn die Koordinaten des Scheitelpunkts sind gerade $x = -\frac{b}{2c}$ und $y = -\frac{b^2}{4c} + a$.



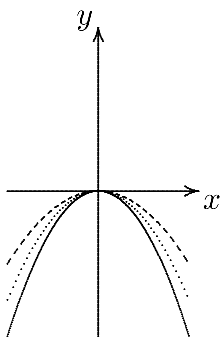
$c > 0$



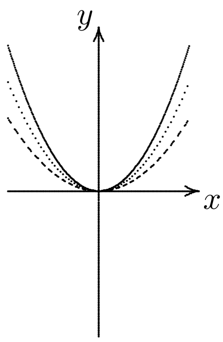
$c < 0$

Wir sehen also: *Durch Verschiebung des Koordinatensystems kann erreicht werden, dass der Scheitelpunkt im Ursprung liegt. Man erhält auf diese Weise die quadratische Funktion* cx^2 (mit dem gleichen c).

Für viele Überlegungen reicht es also, quadratische Funktionen zu betrachten, deren Scheitelpunkt im Ursprung liegt, also die quadratischen Funktionen $f(x) = cx^2$ mit $c \neq 0$. Zu unterscheiden sind dabei die beiden Fälle $c < 0$ und $c > 0$. Ist $c < 0$, so gilt $f(x) \leq 0$ für alle x; ist $c > 0$, so gilt $f(x) \geq 0$ für alle x.



$c < 0$

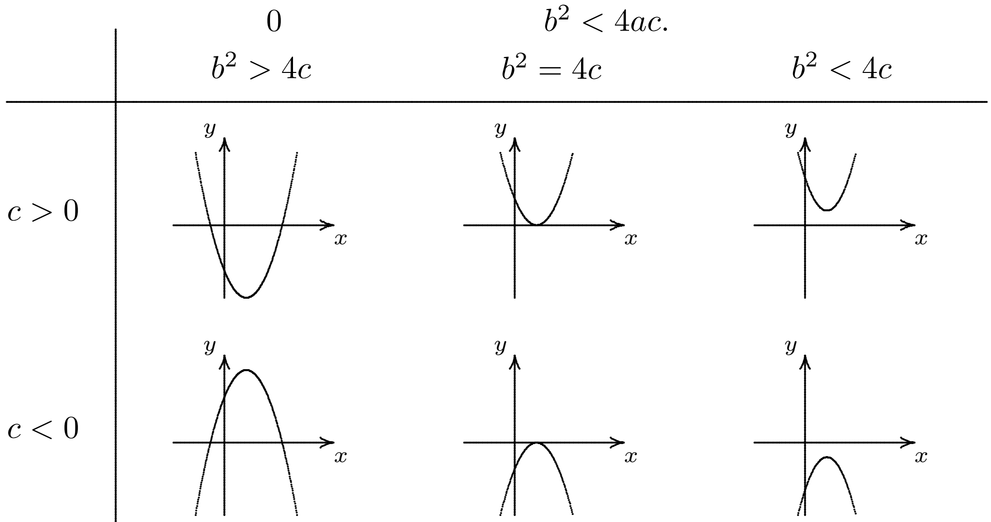


$c > 0$

Nullstellen. Sei f eine echte quadratische Funktion. Die y-Koordinate des Scheitelpunkts gibt darüber Auskunft, wieviele Nullstellen f besitzt.

Satz. *Sei $f(x) = cx^2 + bx + a$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $c \neq 0$. Die Anzahl der Nullstellen von $f(x)$ ist*

$$\begin{array}{ccc} 2 & & b^2 > 4ac, \\ 1 & \text{falls gilt} & b^2 = 4ac, \\ 0 & & b^2 < 4ac. \end{array}$$



Ist $b^2 \geq 4ac$, so berechnet man die Nullstellen mit Hilfe quadratischer Ergänzung!

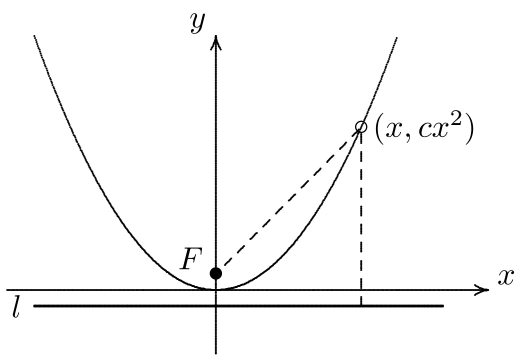
4.2. Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel.

Sind in der reellen Ebene eine Gerade l und ein Punkt F, der nicht auf l liegt, gegeben, so bilden die Punkte P, die gleichen Abstand von F und l haben, eine *Parabel* (und jede Parabel entsteht auf diese Weise); man nennt F den *Brennpunkt* und l die *Leitgerade* der Parabel.

Satz. *Sei $c \neq 0$. Der Graph der Funktion $f(x) = cx^2$ ist die Parabel mit Brennpunkt $(0, \frac{1}{4c})$ und Leitgerade $y = -\frac{1}{4c}$.*

Insbesondere besitzt die Normalparabel den Brennpunkt $(0, \frac{1}{4})$ und die Leitgerade $y = -\frac{1}{4}$.

Beweis: Wir setzen voraus $c > 0$ (der Fall $c < 0$ folgt durch Spiegelung an der x-Achse) und bezeichnen mit $\mathcal{P}$ die Parabel mit Brennpunkt F und Leitgeraden l. Wir betrachten als erstes einen Punkt (x, cx^2) auf dem Graphen von f.



Der Abstand des Punkts (x, cx^2) von der Geraden $y = -\frac{1}{4c}$ ist $cx^2 + \frac{1}{4c}$. Der Abstand des Punkts (x, cx^2) vom Punkt $(0, \frac{1}{4c})$ ist

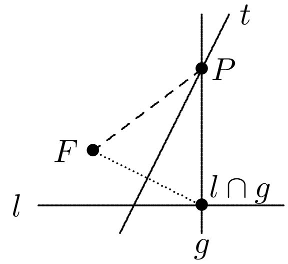
$$\sqrt{x^2 + (cx^2 - \tfrac{1}{4c})^2} = cx^2 + \tfrac{1}{4c},$$

denn

$$\begin{aligned} x^2 + (cx^2 - \tfrac{1}{4c})^2 &= x^2 + (cx^2)^2 - 2cx^2\tfrac{1}{4c} + (\tfrac{1}{4c})^2 \\ &= x^2 + (cx^2)^2 - \tfrac{1}{2}x^2 + (\tfrac{1}{4c})^2 \\ &= (cx^2)^2 + \tfrac{1}{2}x^2 + (\tfrac{1}{4c})^2 \\ &= (cx^2 + \tfrac{1}{4c})^2 \end{aligned}$$

und wegen $c > 0$ ist $cx^2 + \frac{1}{4c} \geq 0$ für alle x. Also sehen wir, dass (x, cx^2) zu $\mathcal{P}$ gehört.

Sei nun umgekehrt ein Punkt (x, y) auf der Parabel $\mathcal{P}$ gegeben. Da der Punkt (x, cx^2) zum Graphen von f gehört, liegt er, wie wir gerade gesehen haben, auf $\mathcal{P}$. Wir sehen: die Punkte (x, y) und (x, cx^2) liegen beide auf $\mathcal{P}$ und haben die gleiche x-Koordinate. Nun gibt es aber auf jeder zu l senkrechten Geraden g nur einen einzigen Punkt P, der zu $\mathcal{P}$ gehört, nämlich den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten t zu F und $l \cap g$ mit g.



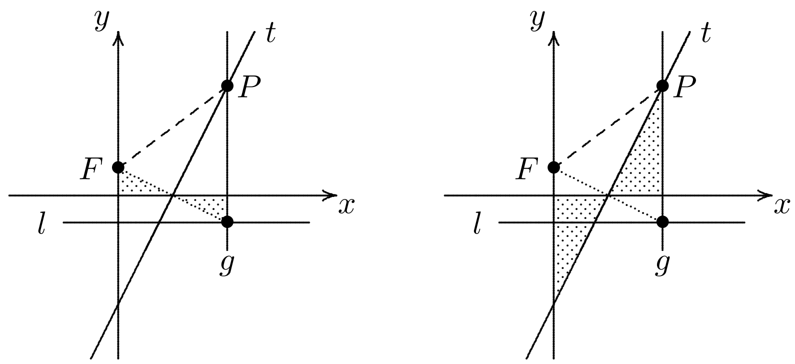
Also ist $(x, y) = (x, cx^2)$ und daher $y = cx^2$. Demnach gehört der Punkt (x, y) zum Graphen der Funktion f.

Was ist die Bedeutung der Geraden t ?

Satz. *Die Gerade t ist die Tangente zu $\mathcal{P}$ im Punkt P. Ist $\mathcal{P}$ der Graph von $f(x) = cx^2$ und $P = (x_0, cx_0^2)$, so ist t der Graph der linearen Funktion*

$$t(x) = 2cx_0x - cx_0^2.$$

Beweis: Wir betrachten wieder den Fall $c > 0$.



Sei $P = (x_0, cx_0^2)$, also ist g die Gerade $x = x_0$. Die links schraffierten Dreiecke zeigen, dass t die x-Achse im Punkt $(x_0/2, 0)$ schneidet. Die rechts schraffierten Dreiecke zeigen, dass t die y-Achse im Punkt $-cx_0^2$ schneidet. Demnach hat für $x_0 \neq 0$ die Gerade t die Steigung $2cx_02/x_0 = 2cx_0$ und den y-Achsenabschnitt $-cx_0^2$. Für $x_0 = 0$ ist t natürlich die x-Achse, also der Graph von $t(x) = 0$, und demnach gilt auch hier die angegebene Formel.

Nun zeigen wir: *die Parabel $f(x) = cx^2$ und die Gerade $t(x) = 2cx_0x - cx_0^2$ schneiden sich in einem einzigen Punkt, und zwar im Punkt $x = x_0$.* Es gilt nämlich:

$$g(x) - t(x) = cx^2 - 2cx_0x + cx_0^2 = c(x^2 - 2x_0x + x_0^2) = c(x - x_0)^2.$$

Für $x = x_0$ ist also $g(x) = t(x)$. Wegen $c \neq 0$ gilt auch umgekehrt: Ist $g(x) = t(x)$, so ist $x = x_0$.

Man nennt eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *differenzierbar* im Punkt x_0, wenn der Graph im Punkt $(x_0, f(x_0))$ eine Tangente besitzt und diese Tangente nicht parallel zur y-Achse ist. Ist f in jedem Punkt differenzierbar, so nennt man f *differenzierbar.* Ist f differenzierbar, so bezeichnet man mit $f'(x_0)$ die Tangentensteigung im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Nach Definition ist dies eine reelle Zahl, man erhält also auf diese Weise eine neue Funktion $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Satz. *Jede quadratische Funktion $f(x) = cx^2 + bx + a$ ist differenzierbar, und zwar ist $f'(x) = 2cx + b$.*

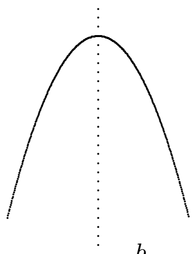
Für den Fall $a = b = 0$ haben wir dies bewiesen. Der allgemeine Fall folgt durch Verschiebung des Scheitelpunkts.

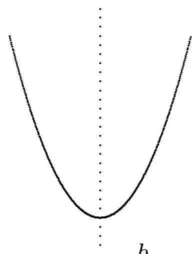
Man kann diesen Satz natürlich auch mit den Methoden der Infinitesimal-Rechnung beweisen! Darauf werden wir später noch eingehen.

4.3. Tangenten-Steigungen. Extrema.

Satz. *Sei $f(x) = cx^2 + bx + a$ eine echte quadratische Funktion. Die Tangentensteigung an der Stelle x_0 ist genau dann Null, wenn $x_0 = -\frac{b}{2c}$ gilt.*

Hier eine Übersicht über die jeweiligen Tangensteigungen, die Krümmungen und das Monotonie-Verhalten. Zu unterscheiden ist, ob c negativ oder positiv ist:





	$c < 0$			$c > 0$	
$x < -\frac{b}{2c}$	$x = -\frac{b}{2c}$	$x > -\frac{b}{2c}$	$x < -\frac{b}{2c}$	$x = -\frac{b}{2c}$	$x > -\frac{b}{2c}$
	Tangentensteigung			Tangentensteigung	
positiv	Null	negativ	negativ	Null	positiv
	rechts-gekrümmt			links-gekrümmt	
streng monoton wachsend	Maximum	streng monoton fallend	streng monoton fallend	Minimum	streng monoton wachsend

Minima und Maxima. Ein wichtiger Grund für das Arbeiten mit Funktionen ist die Suche nach Extremwerten, also nach Minima und Maxima (meist sucht man lokale Minima und lokale Maxima, falls im vorgegebenen Problem nur Werte innerhalb eines gewissen Bereichs von Interesse sind).

Satz. *Sei f eine quadratische Funktion. Genau dann nimmt f an der Stelle x ihr Minimum oder Maximum an, wenn $f'(x) = 0$ gilt.*

Beweis. Ganz allgemein gilt für differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: hat f an der Stelle x_0 ein Minimum oder ein Maximum, so ist $f'(x_0) = 0$. Ist nun f eine echte quadratische Funktion, so gilt $f'(x_0) = 0$ nur für die x-Koordinate x_0 des Scheitelpunkts. Ist dagegen f linear, so gibt es ein x_0 mit $f'(x_0) = 0$ nur dann, wenn f eine konstante Funktion ist: in diesem Fall hat die Funktion f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ ihr Minimum wie ihr Maximum.

Es sollte hier betont werden, dass die Verwendung der Differentialrechnung zur Bestimmung der Extremstelle einer quadratischen Funktion zwar praktisch, aber **nicht** notwendig ist: Immer reicht es aus, die Scheitelpunktsform anzugeben. Im Abschnitt 3 haben wir drei quadratische Funktionen betrachtet (die Funktion $h(t)$ in 3.1., und die Funktionen $h(a)$ und $g(b)$ in 3.3.) Statt zu Differenzieren hätten wir jeweils die x-Koordinate des Scheitelpunkts bestimmen können — das wäre auch nicht komplizierter gewesen! So war $h(t) = \sum(t - x_i)^2 = ct^2 + bt + a$, mit $c = n$ und $b = -2\sum x_i$. Die x-Koordinate des Scheitelpunkts ist demnach $-\frac{b}{2c} = \frac{1}{n}\sum x_i$.

4.4. Gleichmäßig beschleunigte (konstant beschleunigte) Bewegungen.

Sei $f(t)$ eine **Zeit-Weg-Funktion,** wie sie zur Bescheibung der Bewegung eines Objekts (Mensch, Tier, Auto, ...) auf einer Geraden verwendet werden kann; die Funktion $f(t)$ beschreibt den zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit t; zum Zeitpunkt t befindet sich dabei das Objekt an der Stelle $f(t)$. *Die Ableitung $f'(t)$ dieser Funktion nennt man die* **Geschwindigkeit***, die zweite Ableitung $f''(t)$ die* **Beschleunigung.**

Gleichmäßig beschleunigte Bewegungen werden durch quadratische Funktionen beschrieben. Dabei versteht man unter einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung (wie der Name sagt) eine Bewegung, bei der die Beschleunigung konstant ist, man spricht daher auch von konstant beschleunigter Bewegung. Ist die Beschleunigung konstant, so ist die Geschwindigkeit eine lineare Funktion und demnach ist die Zeit-Weg-Funktion $f(t)$ durch ein Polynom zweiten Grads gegeben, also von der Form

$$f(t) = ct^2 + bt + a,$$

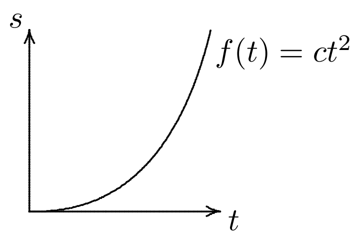
mit Konstanten a, b, c. Die Ableitung einer derartigen Funktion ist $f'(t) = 2at + b$, die zweite Ableitung ist $2a$; wir können also die Konstanten a, b, c folgendermaßen interpretieren:

- Es ist a die Position zum Zeitpunkt $t = 0$,
- wegen $f'(0) = b$ ist b die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$,
- schließlich ist $2c$ der Wert der Beschleunigung (nicht nur zum Zeitpunkt $t = 0$, sondern zu jedem Zeitpunkt: es handelt sich ja um eine konstant beschleunigte Bewegung).

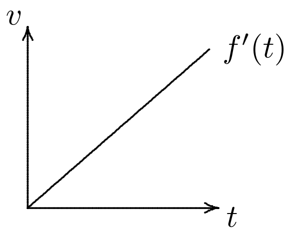
Geschwindigkeiten werden typischerweise in m/sec oder km/h, Beschleunigungen in m/sec^2 angegeben.

In der Wikipedia findet man Beispiele für einige typische Beschleunigungen, an denen man sich orientieren kann.

Anfahren. Die Funktion $f(t) = ct^2$ beschreibt den Beginn einer konstant beschleunigten Bewegung:

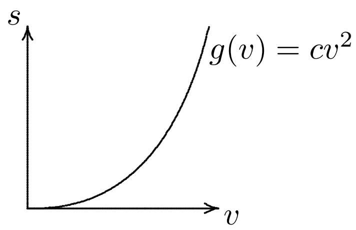


Was ist hier die Beschleunigung? Die Ableitung $f'(t)$ ist eine lineare Funktion (sogar homogen-linear), die Beschleunigung ist deren Steigung.



Diese Funktion $f'(t)$ ist etwas aus dem Alltag Wohlbekanntes (für jedes Kind!): Man sitzt im Auto, man sieht, wie die Nadel des Tachometers steigt: bei einer konstant beschleunigten Bewegung mit Fahrtbeginn zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Geschwindigkeit proportional zur Zeit.

Bremsen. Einen entsprechenen Graphen erhält man, wenn man den Bremsweg s in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v notiert (man betrachtet hier eine Vollbremsung):



4.5. Der Spezialfall des freien Falls.

Typisches Beispiel einer konstant beschleunigten Bewegung ist der **freie Fall** (eines Apfels vom Baum; eines Steins, der vom Brunnenrand in einen Brunnen fällt; eines Menschen, der im Schwimmbad vom 10 Meterturm springt); "freier Fall" bedeutet, dass nur die Gravitationskraft (also die Erdanziehung), nicht aber der Luft-Widerstand, berücksichtigt wird. Die Beschleunigung, die durch die Gravitationskraft hervorgerufen wird, ist konstant (allerdings gibt es geringe Unterschiede in Abhängigkeit von der Höhe über dem Meerespiegel), sie beträgt etwa $g \approx 10$ m/sec^2. (Genauer: $g \approx 9{,}81$ m/sec^2; und eigentlich müsste hier ein Minuszeichen hinzugefügt werden, wenn man sich wie üblich eine senkrechte Koordinaten-Achse als nach oben gerichtet vorstellt! Zusätzlich beachte man, dass die Konstante c in der Zeit-Weg-Funktion $f(t) = ct^2 + bt + a$ dem **halben** Wert der Beschleunigung entspricht, also $f(t) = -\frac{g}{2}t^2 + bt + a$.)

Wie gesagt, der freie Fall wird durch die Funktion

$$s(t) = -\frac{9,81}{2} \cdot t^2 \text{ [m]}$$

beschrieben, dabei ist t die Zeit, gemessen in Sekunden. Die folgende Tabelle liefert einen Eindruck für die ungefähren Werte, die dabei auftreten:

t [sec]	0	1	2	3	4	5
$-s(t)$ [m]	0	5	20	44	78	123

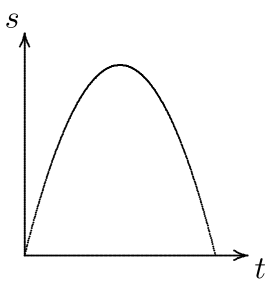
Zum Beispiel fällt also ein Stein (Ball, Apfel) in 3 Sekunden etwa 44 m. Und umgekehrt gilt: wirft man einen Ball 5 m hoch, so dauert es etwa 2 Sekunden, bis er wieder unten ist (1 Sekunde fliegt er hoch, 1 Sekunde fliegt er herunter).

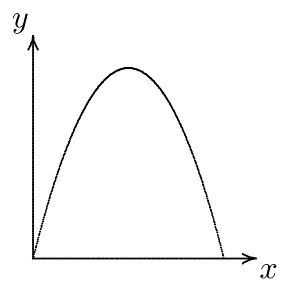
Zu dieser Tabelle sollte noch die jeweilige Endgeschwindigkeit hinzugefügt werden. Aus der Bewegungsgleichung $s(t) = -\frac{9,81}{2} \cdot t^2$ folgt $s'(t) = 9,81 \cdot t$, diese Funktion liefert die Geschwindigkeit $s'(t)$ zum Zeitpunkt t.

t [sec]	0	1	2	3	4	5
$-s'(t)$ [m/sec]	0	10	20	30	40	50

Wann erreicht ein Körper im freien Fall die Geschwindigkeit 100 km/h ? Es gilt 1 km/h $\approx$ 0,28 m/sec, also 100 km/h $\approx$ 28 m/sec. Wegen $s'(t) = 9,81 \cdot t$ sieht man, dass diese Geschwindigkeit nach 2,85 sec erreicht wird. Die entsprechende Fallhöhe ist wegen $s(t) = -\frac{9,81}{2} t^2 \; -\frac{9,81}{2} \cdot (2,85)^2 \approx 39,8$ [m]. Wir sehen also: Beim Sturz aus 40 m Höhe schlägt man mit der Geschwindigkeit von etwa 100 km/h auf.

Zur Illustration des freien Falls werden zwei verschiedene Arten von Parabel-Bildern herangezogen, die man nicht verwechseln darf: nämlich einerseits Zeit-Weg-Diagramme, andererseits x-y-Diagramme, wobei jedes Paar (x, y) eine räumliche Position bedeutet; in beiden Fällen erhält man eine nach unten geöffnete Parabel.





Im linken Bild geht man davon aus, dass ein Körper senkrecht nach oben geworfen wird (oder dass man nur die vertikale Komponente einer Bewegung betrachtet) und notiert im Diagram für jeden Zeitpunkt $t = t_0$ die Höhe $s(t_0)$, die der Körper zu diesem Zeitpunkt erreicht hat. Das rechte Bild beschreibt den Wurf einer Körpers schräg nach oben: eingetragen wird die Parabel, die der Betrachter sieht.

Das rechte Bild präsentiert nur Orts-Koordinaten. Hier handelt es sich um die sogenannte **Wurf-Parabel**: Wird ein Gegenstand geworfen, so erhält er einen Impuls in eine Richtung. Ohne Einwirken anderer Kräfte würde er sich geradlinig weiterbewegen, die Erdanziehung liefert aber eine Kraft in Richtung des Erdmittelpunkts, es erfolgt daher eine Ablenkung senkrecht nach unten.