

5. Polynome und rationale Funktionen.

Wir betrachten nun ganz allgemein Polynome, und gleich auch rationale Funktionen. Wir sind bisher ganz bedächtig vorgegangen: die Abschnitte 2 und 3 waren den linearen Funktionen gewidmet, der Abschnitt 3 den quadratischen. Nun sollten wir mit der gleichen Sorgfalt die kubischen Funktionen (also die Polynome vom Grad 3) betrachten, dann die biquadratischen (Polynome vom Grad 4), u.s.w. Die Zeit reicht dafür nicht aus. In jedem Fall müssten wir nach einer Weile abbrechen, denn keineswegs können wir allen Graden die gleiche Aufmerksamkeit widmen (dies würde ja ein Buch mit unendlich vielen Abschnitten liefern). Auch wäre gar nicht klar, was man über die Unterschiede der Polynome vom Grad 72 und denen vom Grad 74 notieren sollte. Nach einer allgemeinen Einführung werden wir wenigstens kurz auf diejenigen vom Grad 3 eingehen, da hier ein wichtiges Phänomen zum ersten Mal auftaucht, das des Wendepunkts.

5.1. Polynome.

Definition: Eine Funktion der Form

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

mit reellen Zahlen a_i ($0 \leq i \leq n$) nennt man ein *Polynom*, die Zahlen a_i heißen die *Koeffizienten* des Polynoms, (dabei ist $n \geq 0$ eine ganze Zahl). Ist $a_n \neq 0$ so nennt man n den *Grad* des Polynoms und a_n seinen *höchsten* Koeffizienten, falls notwendig schreibt man $\text{grad } f(x) = n$. Ist der höchste Koeffizient $a_n = 1$, so nennt man $f(x)$ ein *normiertes* Polynom. Sind alle Koeffizienten a_i gleich Null, so handelt es sich um die Nullfunktion, man weist ihr den Grad -1 zu.

(1) Manche Bücher geben der Nullfunktion als Grad das Symbol $-\infty$.

(2) Man beachte, dass man bei der Summendarstellung $\sum a_i x^i$ neben den üblichen Potenzen $x^2, x^3, \dots$ auch die Potenzschreibweise x^1 und x^0 verwendet: dabei ist $x^1 = x$ und $x^0 = 1$.

(3) Die meisten Texte verwenden die Konvention, den Koeffizienten von x_i mit a_i oder c_i oder so zu bezeichnen, also mit Index i (und nicht etwa $n-i$). Die Reihenfolge der Koeffizienten beginnt demnach mit a_0 , dann kommt a_1 , danach a_2 und so weiter. Dies erklärt, warum wir in den Abschnitten 2 und 4 als Koeffizienten für lineare bzw. quadratische Funktionen ganz entsprechend die Reihenfolge a, b bzw. a, b, c verwendet haben: $f(x) = a + bx$, $f(x) = a + bx + cx^2$.

Es gilt also:

- Es gibt genau ein Polynom vom Grad -1 , nämlich die Nullfunktion.
- Die Polynome vom Grad 0 sind die konstanten Funktionen ungleich Null.
- Die Polynome vom Grad 1 sind die nicht-konstanten linearen Funktionen.
- Die Polynome vom Grad 2 sind die echten quadratischen Funktionen.
- Die Polynome vom Grad 3 werden wir im Abschnitt 5.2 analysieren.

Polynome kann man wie üblich addieren und multiplizieren, man erhält dann wieder Polynome.

Addition. Sind $f(x)$ und $g(x)$ Polynome vom Grad höchstens n , so ist auch $f(x) + g(x)$ ein Polynom vom Grad höchstens n . Hier die Additionsregel: Sei $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, und $g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$, so ist

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i$$

(dabei haben wir vorausgesetzt, dass man für $f(x)$ und $g(x)$ die gleiche obere Summen-schranke n verwendet — gegebenenfalls füge man eben zu einem der beiden Polynome noch Koeffizienten $a_i = 0$ hinzu).

Multiplikation. Seien Polynome $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, und $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ gegeben, dann ist

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k, \quad \text{mit} \quad c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}.$$

Es ist also

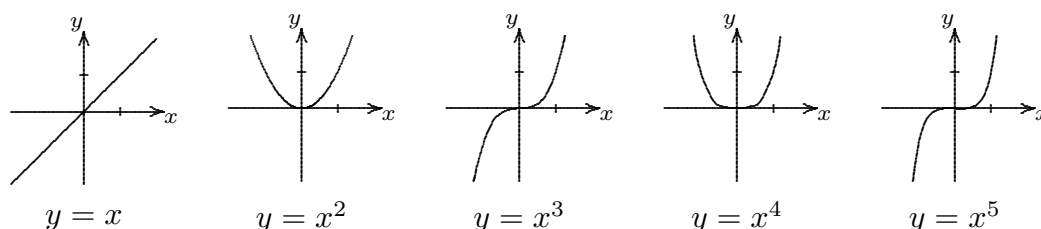
$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0, \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ &\dots \\ c_{n+m-1} &= a_{n-1} b_m + a_n b_{m-1} \\ c_{n+m} &= a_n b_m \end{aligned}$$

(eigentlich müsste man bei der Bildung der letzten Koeffizienten ebenfalls an eine ganz lange Summe denken, so etwa beim Koeffizienten c_{n+m} an $c_{n+m} = a_0 b_{n+m} + a_1 b_{n+m-1} + \dots + a_{n+m} b_0$, aber bis auf den Summanden $a_n b_m$ sind alle anderen Summanden gleich Null (die ersten, weil $b_j = 0$ aus $j > m$ folgt, und die letzten, weil $a_i = 0$ aus $i > n$ folgt). Insbesondere gilt:

Satz. Der Grad des Produkts $f(x)g(x)$ zweier von Null verschiedener Polynome $f(x), g(x)$ ist die Summe der Grade und der höchste Koeffizient von $f(x)g(x)$ ist das Produkt der höchsten Koeffizienten von $f(x)$ und $g(x)$.

Beweis: Ist a_n der höchste Koeffizient von $f(x)$ und b_m der höchste Koeffizient von $g(x)$, so ist, wie wir gerade gesehen haben, der höchste Koeffizient von $f(x)g(x)$ gleich $c_{n+m} = a_nb_m$. Wegen $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$ ist $c_{n+m} = a_nb_m \neq 0$. Insbesondere hat $f(x)g(x)$ den Grad $n+m$.

Monome. Polynome der Form x^n nennt man *Monome*. Polynome sind also nichts anderes als Linearkombinationen von Monomen. Hier zeigen wir die Graphen der Monome x^n mit $1 \leq n \leq 5$:



Ist n gerade, so ist x^n eine gerade Funktion, ist n ungerade, so ist x^n eine ungerade Funktion. Dabei heißt eine Funktion $f(x)$ *gerade*, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle x gilt, wenn also der Graph von f spiegelsymmetrisch zur y -Achse ist. Die Funktion $f(x)$ heißt *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle x gilt, wenn also der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

Für das Rechnen mit Polynomen ist es oft wichtig, die Potenzen von $(x+y)^n$ für beliebiges n zu kennen! Es gelten die folgenden allgemeinen binomischen Formeln:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\(x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\&\dots\end{aligned}$$

Die Koeffizienten, die hier auftreten, sind die des Pascal'schen Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ \dots & & \dots & & \dots & & \end{array}$$

Dabei stehen links und rechts außen jeweils Einsen, die weiteren Zahlen erhält man jeweils als Summe der beiden darüberstehenden Zahlen. Der Name verweist auf BLAISE PASCAL (1623-1662), diese Zahlenanordnung war aber auch schon dem persischen Astronomen OMAR CHAYYAM (1048-1123) und dem chinesischen Mathematiker YANG HUI (ca. 1238-1298) bekannt.

Skalierung: Durch lineares Skalieren kann man erreichen, dass einige der Koeffizienten eines Polynoms zu Null oder zu 1 werden:

- Vertikales Verschieben: dies betrifft den Koeffizienten a_0 . Man kann $a_0 = 0$ annehmen.
- Vertikale Streckung/Stauchung; Spiegelung an der x -Achse: Man kann $a_n = 1$ annehmen ("Normierung").
- Horizontales Verschieben: Sei $f(x)$ schon normiert. Ersetze x durch $x - \frac{1}{n}a_{n-1}$. Dann erhält man ein Polynom der Form $x^n + b_{n-2}x^{n-2} + \dots$. Man kann demnach $a_{n-1} = 0$ annehmen. Zum Beweis verwendet man die oben genannten allgemeinen binomischen Formeln (im Abschnitt 5.2 wird der Fall $n = 3$ genauer betrachtet).

5.2. Polynome vom Grad 3.

Skalieren. Sei $f(x)$ ein Polynom vom Grad 3.

- Durch **Normierung** (also vertikale Streckung oder Stauchung, gegebenenfalls zusätzlich noch Spiegelung an der x -Achse) erhält man ein normiertes Polynom.
- Sei nun $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Betrachte

$$\begin{aligned} g(x) &= f\left(x - \frac{1}{3}a_2\right) \\ &= \left(x - \frac{1}{3}a_2\right)^3 + a_2\left(x - \frac{1}{3}a_2\right)^2 + a_1\left(x - \frac{1}{3}a_2\right) + a_0 \\ &= x^3 - 3 \cdot x^2 \frac{1}{3}a_2 + \dots + a_2x^2 + \dots \end{aligned}$$

Hingeschrieben sind nur die Potenzen mit Exponent größer oder gleich 2. Man sieht, dass der zweithöchste Koeffizient von $g(x)$ gleich Null ist. Der Übergang von $f(x)$ zu $g(x)$ entspricht einer **Horizontalverschiebung**, und zwar wird die x -Achse um $\frac{1}{3}a_2$ nach rechts verschoben.

- Sei nun $f(x) = x^3 + b_1x + b_0$. Durch **Vertikal-Verschiebung** kann man den Koeffizienten b_0 zu Null machen. Auf diese Weise erhalten wir also die Form: $f(x) = x^3 + bx$. Diese Funktion ist Summe von x^3 und einer Proportionalität.
- Es bleibt noch die horizontale Streckung/Stauchung zu thematisieren. Wir unterscheiden drei Fälle:
Fall 1: $b = 0$. Dann ändern wir nichts.
Fall 2: $b > 0$, etwa $b = \beta^2$. Ist $f(x) = x^2 + \beta^2x$, so ist

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\beta^3} f(\beta x) \\ &= \frac{1}{\beta^3} ((\beta x)^3 + \beta^2(\beta x)) \\ &= x^3 + x. \end{aligned}$$

Fall 3: $b < 0$, etwa $b = -\beta^2$, also $f(x) = x^2 - \beta^2 x$, so ist

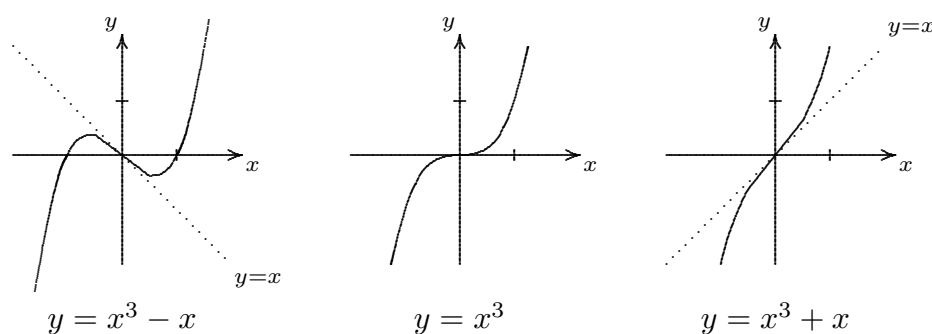
$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\beta^3} f(\beta x) \\ &= \frac{1}{\beta^3} ((\beta x)^2 - \beta^2(\beta x)) \\ &= x^2 - x. \end{aligned}$$

Es gibt also nur drei wesentlich verschiedene Fälle: $b = -1$, $b = 0$, $b = 1$. Insgesamt sehen wir:

Satz. Durch lineares Skalieren kann jedes Polynom vom Grad 3 in die Form

$$f(x) = x^3 + bx \quad \text{mit} \quad b \in \{-1, 0, 1\}$$

gebracht werden.



In allen drei Fällen sehen wir: Für $x \leq 0$ ist der Graph rechts-gekrümmt, für $x \geq 0$ dagegen links-gekrümmt. Der Ursprung ist ein **Wendepunkt**.

Ganz allgemein betrachten wir ein normiertes Polynom $f(x)$ vom Grad 3 und dessen Ableitungen:

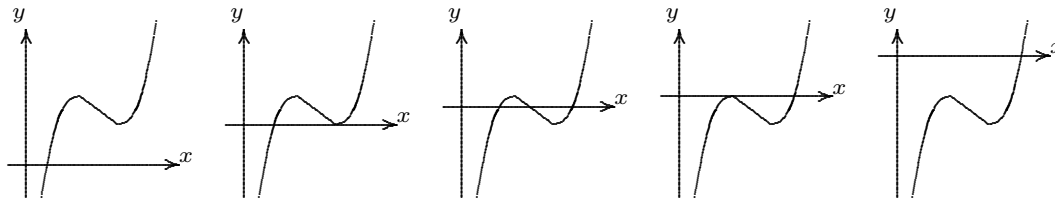
$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ f'(x) &= 3x^2 + 2a_2 x + a_1 \\ f''(x) &= 6x + 2a_2 \end{aligned}$$

Für einen **Wendepunkt** gilt: die zweite Ableitung verschwindet. Nun ist die zweite Ableitung eine lineare, nicht-konstante Funktion, sie besitzt also genau eine Nullstelle, nämlich $x_0 = \frac{1}{3}a_2$ (denn aus $f''(x_0) = 0$ folgt $6x_0 = 2a_2$, also $x_0 = \frac{1}{3}a_2$).

Es sei daran erinnert, dass wir beim linearen Skalieren die x -Achse um $\frac{1}{3}a_2$ nach rechts verschoben haben: auf diese Weise haben wir also gerade erreicht, dass der Wendepunkt auf der y -Achse liegt.

Nullstellen. Offensichtlich besitzt jedes Polynom $f(x)$ vom Grad 3 mindestens eine Nullstelle.

- Ist die Tangensteigung im Wendepunkt positiv oder Null, so besitzt $f(x)$ genau eine Nullstelle.
- Sucht man also weitere Nullstellen, so muss man annehmen, dass die Tangensteigung im Wendepunkt negativ ist. Hier kommt es offensichtlich auf die Vertikalverschiebung an:



Wie man sieht, gibt es höchstens drei Nullstellen. Wenn es zwei Nullstellen gibt, dann ist die x -Achse Tangente für eine dieser Nullstellen: man sagt, dass es sich um hier um eine **doppelte** Nullstelle handelt.

Eine Formel für die Nullstellen werden wir erst dann angeben können, wenn wir die komplexen Zahlen eingeführt haben werden.

5.3. Teilen mit Rest, Abspalten von Nullstellen.

Seien $f(x), g(x)$ zwei Polynome. Man nennt $g(x)$ einen *Teiler* von $f(x)$, falls es ein Polynom $q(x)$ mit $f(x) = g(x)q(x)$ gibt.

Üblicherweise setzt man hier voraus, dass zumindest das Polynom $g(x)$ von Null verschieden ist. Dann ist $q(x)$ eindeutig bestimmt!

Es gibt ein Verfahren, mit dem man feststellen kann, ob $g(x)$ ein Teiler von $f(x)$ ist: man teilt $f(x)$ durch $g(x)$ mit Rest:

Satz. Seien $f(x), g(x)$ Polynome, sei $g(x)$ nicht das Null-Polynom. Dann gibt es Polynome $q(x)$ und $r(x)$ mit

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \quad \text{mit} \quad \text{grad } r(x) < \text{grad } g(x).$$

Diese Polynome $q(x)$ und $r(x)$ sind eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit: Sei $m = \text{grad } g(x)$. Sei

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) = g(x)p(x) + s(x)$$

mit Polynomen $q(x), p(x), r(x), s(x)$ und es sei $\text{grad } r(x) < m$ und auch $\text{grad } s(x) < m$. Die zweite Gleichheit können wir umschreiben zu

$$g(x)(q(x) - p(x)) = s(x) - r(x).$$

Rechts steht ein Polynom mit Grad echt kleiner als m , links steht ein Vielfaches des Polynoms $g(x)$. Aber $\text{grad } g(x) = m$. Vielfache von $g(x)$ haben Grad größer oder gleich m , mit der einzigen Ausnahme, wenn $g(x)$ mit dem Nullpolynom multipliziert wird. Wir sehen also: $q(x) - p(x)$ muss das Nullpolynom sein, also $q(x) = p(x)$ und demnach ist dann auch $s(x) - r(x)$ das Nullpolynom, also $s(x) = r(x)$.

Die Existenz von $q(x)$ und $r(x)$ zeigt man induktiv: Ist $\text{grad } f(x) < \text{grad } g(x)$, so nimmt man für $q(x)$ das Nullpolynom, und setzt $r(x) = f(x)$. Ist $\text{grad } f(x) \geq \text{grad } g(x)$, so schaut man sich zuerst nur die höchstens Koeffizienten von $f(x)$ und $g(x)$ an: sei etwa $\text{grad } f(x) = n$ und $\text{grad } g(x) = m$, und $f(x) = a_n x^n + \dots$ und $g(x) = b_m x^m + \dots$ mit $a_n \neq 0, b_m \neq 0$. Nach Voraussetzung ist $n \geq m$, wir können also das Polynom

$$q_1(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{m-n}$$

bilden. Wir multiplizieren $g(x)$ mit $q_1(x)$ und erhalten ein Polynom vom Grad n mit höchstem Koeffizienten $b_m \cdot \frac{a_n}{b_m} = a_n$. Bilden wir daher die Differenz $f(x) - g(x)q_1(x)$, so erhalten wir ein Polynom, dessen Grad echt kleiner als n ist. Nun wird das gleiche Verfahren für $f(x) - g(x)q_1(x)$ angewandt: wieder ziehen wir ein Vielfaches von $g(x)$ ab, usw. Das Verfahren wird einfacher, wenn das Polynom $g(x)$ normiert ist, denn dann brauchen wir nicht immer b_m im Nenner mitschleppen.

Hier ein Beispiel: Wir wollen $f(x) = x^6 + x^5 + x^4 - x^3 + x^2 + x + 1$ durch $g(x) = x^2 + 1$ mit Rest teilen.

$$\begin{array}{r}
 (x^6 + x^5 + x^4 - x^3 + x^2 + x + 1) : (x^2 + 1) = x^4 + x^3 - 2x + 1 \\
 \underline{-(x^6 + x^4)} \\
 x^5 - x^3 \\
 \underline{-(x^5 + x^3)} \\
 - 2x^3 + x^2 + x \\
 \underline{-(-2x^3 - 2x)} \\
 x^2 + 3x + 1 \\
 \underline{-(x^2 + 1)} \\
 + 3x
 \end{array}$$

Rechts steht das Polynom $q(x) = x^4 + x^3 - 2x + 1$, unten steht das Restpolynom $r(x) = 3x$. Insgesamt haben wir gezeigt:

$$\begin{aligned}
 f(x) = x^6 + x^5 + x^4 - x^3 + x^2 + x + 1 &= (x^2 + 1)(x^4 + x^3 - 2x + 1) + 3x \\
 &= g(x) \cdot q(x) + r(x).
 \end{aligned}$$

Wie beim Rechnen mit ganzen Zahlen kann man das Teilen mit Rest dazu benutzen, den größten gemeinsamen Teiler zweier von Null verschiedener Polynome $f(x), g(x)$ zu bestimmen. Dafür verwendet man den **euklid'schen Algorithmus**: Man teilt $f(x)$ durch $g_1(x) = g(x)$ mit Rest. Ist

der Rest Null, so ist $g(x)$ ein Teiler von $f(x)$ und demnach ein gemeinsamer Teiler von $f(x)$ und $g(x)$ mit größtmöglichem Grad. Sei andernfalls $g_2(x)$ der Rest. Man teilt nun $g_1(x)$ durch $g_2(x)$ mit Rest. Nun gilt: Ist der Rest Null, so sieht man leicht, dass $g_2(x)$ ein gemeinsamer Teiler von $f(x)$ und $g(x)$, und zwar wieder mit größtmöglichem Grad. Andernfalls bezeichnet man den neuen Rest mit $g_3(x)$ und teilt nun $g_2(x)$ durch $g_3(x)$ mit Rest. Und so weiter.

Das Teilen mit Rest liefert folgendes wichtige Ergebnis:

Satz. Sei $f(x)$ ein von Null verschiedenes Polynom. Sei $a \in \mathbb{R}$. Genau dann ist $f(a) = 0$, wenn das Polynom $x - a$ das Polynom $f(x)$ teilt.

Beweis: Ist $x - a$ ein Teiler von $f(x)$, so gibt es ein Polynom $g(x)$ mit $f(x) = (x - a)g(x)$. Setzen wir a ein, so erhalten wir $f(a) = (a - a)g(a) = 0 \cdot g(a) = 0$.

Umgekehrt setzen wir voraus, dass $f(a) = 0$ gilt. Wir teilen $f(x)$ durch das Polynom $x - a$ mit Rest: Wir erhalten Polynome $q(x), r(x)$ mit

$$f(x) = (x - a)q(x) + r(x) \quad \text{mit} \quad \text{grad } r(x) < \text{grad}(x - a).$$

Nun ist aber $\text{grad}(x - a) = 1$, also gilt $\text{grad } r(x) < 1$, demnach ist $r(x)$ eine Konstante, sagen wir $r(x) = c \in \mathbb{R}$, es gilt also $f(x) = (x - a)q(x) + c$. Setzen wir $x = a$, so sehen wir: $0 = f(a) = (a - a)q(a) + c = 0 + c = c$. Demnach gilt $f(x) = (x - a)q(x)$.

Ist also a eine Nullstelle eines Polynoms $f(x)$ vom Grad $n \geq 1$, so können wir $f(x)$ in der Form $f(x) = (x - a)q(x)$ schreiben, dabei ist dann $q(x)$ ein Polynom vom Grad $n - 1$; man sagt, dass man $q(x)$ durch **Abspalten einer Nullstelle** erhält.

Nun können wir fragen: Besitzt $q(x)$ Nullstellen? Beachte: jede Nullstelle von $q(x)$ ist natürlich auch Nullstelle von $f(x)$. Besitzt $q(x)$ mindestens eine Nullstelle, so werden wir auch diese abspalten, usw. Insgesamt erhalten wir folgenden Satz:

Satz. Jedes Polynom vom Grad $n \geq 0$ lässt sich als Produkt

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_t)p(x)$$

schreiben, wobei $p(x)$ ein Polynom ohne Nullstellen ist. Dabei hat $p(x)$ den Grad $n - t$.

Folgerung 1: Ein Polynom vom Grad $n \geq 0$ hat höchstens n Nullstellen.

Folgerung 2. Ist $f(x)$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ und ist $c \in \mathbb{R}$, so gibt es höchstens n Zahlen $a_i \in \mathbb{R}$ mit $f(a_i) = c$.

Beweis: Betrachte das Polynom $g(x) = f(x) - c$. Wegen $\text{grad } f(x) \geq 1$, hat $g(x)$ den gleichen Grad wie $f(x)$; insbesondere ist es nicht das Null-Polynom. Demnach hat $g(x)$ höchstens n Nullstellen. Die Nullstellen von $g(x)$ sind aber genau die Zahlen $a_i \in \mathbb{R}$ mit $f(a_i) = c$.

Folgerung 3. *Sei $f(x)$ ein Polynom vom Grad n . Ist $n \geq 1$, so hat $f(x)$ höchstens $n - 1$ lokale Extrema. Ist $n \geq 2$, so hat $f(x)$ höchstens $n - 2$ Wendepunkte.*

Beweis: Aus $\text{grad } f(x) = n \geq 1$ folgt $\text{grad } f'(x) = n - 1 \geq 0$. Jedes lokale Extremum von $f(x)$ ist eine Nullstelle von $f'(x)$. Folgerung 1 zeigt, dass es nur höchstens $n - 1$ lokale Extrema geben kann. Aus $\text{grad } f(x) = n \geq 2$ folgt $\text{grad } f''(x) = n - 2 \geq 0$. Jeder Wendepunkt von $f(x)$ ist eine Nullstelle von $f''(x)$. Folgerung 1 zeigt, dass es nur höchstens $n - 2$ Wendepunkte geben kann.

Im Rahmen der Behandlung der komplexen Zahlen werden wir folgenden Satz kennenlernen:

Fundamentalsatz der Algebra. *Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ lässt sich als Produkt von Polynomen vom Grad 1 und 2 schreiben.*

Insbesondere gilt also: *Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ ohne Nullstellen ist ein Produkt von Polynomen vom Grad 2.*

5.4. Grobvorstellung polynomialer Funktionen.

Im Abschnitt 12 wird definiert werden, was es bedeutet, wenn man sagt, dass eine Funktion “stetig” ist. Grob gesagt, soll dies bedeuten, dass man den Graph (in jedem Intervall, in dem die Funktion definiert ist) ohne Absetzen des Bleistifts zeichnen kann... Wir werden dann beweisen:

- *Polynome sind stetige Funktionen.*
- (B) **Beschränktheit.** *Jede stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ ist beschränkt.* Das soll heißen: Die Funktion $f(x)$ sei auf einem Intervall $[a, b]$ definiert und dort stetig. Dann gibt es eine reelle Zahl v mit $|f(x)| \leq v$ für alle $x \in [a, b]$.
- (Z) **Zwischenwertsatz.** *Für eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ treten alle Zahlen in $[f(a), f(b)]$ als Werte auf.* Das soll heißen: Die Funktion $f(x)$ sei auf einem Intervall $[a, b]$ definiert und dort stetig. Zu jedem reellen Zahl $r \in [f(a), f(b)]$ gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = r$.

Wir werden diese Eigenschaften von Polynomen nun verwenden, um eine Grobvorstellung der zugehörigen Graphen zu entwickeln.

Als erstes notieren wir:

- *Eine auf $\mathbb{R}$ definierte stetige Funktion ohne Nullstellen nimmt entweder nur positive oder aber nur negative Werte an.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus dem Zwischenwertsatz.

Wie sieht eine Funktion der Form

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_t)p(x)$$

mit einer stetigen Funktion $p(x)$, die keine Nullstellen hat, aus? Wir wollen notieren, wann $f(x)$ positiv oder negativ ist. Offensichtlich hängt dies gar nicht von $p(x)$ ab; es reicht also das Polynom $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_t)$ zu betrachten.

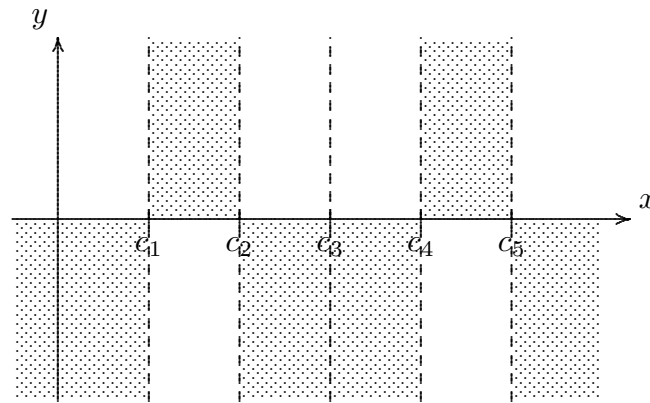
Regel. Ist x_0 keine Nullstelle von $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_t)$, so ist $f(x_0)$ genau dann positiv, wenn die Anzahl der a_i mit $x_0 < a_i$ gerade ist.

Beweis: Ist $x_0 > a_i$, so ist $(x_0 - a_i) > 0$. Ist $x_0 < a_i$, so ist $(x_0 - a_i) < 0$. Die Anzahl der a_i mit $x_0 < a_i$ sei s . Wir sehen also: von den t Faktoren $(x_0 - a_i)$ im Produkt $f(x_0) = (x_0 - a_1)(x_0 - a_2) \cdots (x_0 - a_t)$ sind $t - s$ Faktoren positive und s Faktoren negativ.

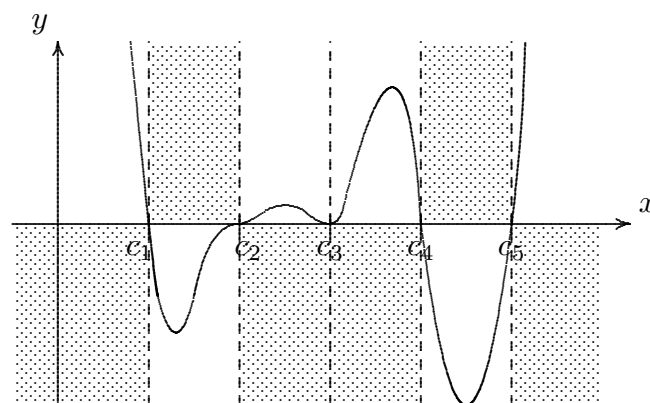
Beispiel: Seien $c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < c_5$ reelle Zahlen. Wir betrachten das Polynom

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)^3(x - c_3)^2(x - c_4)(x - c_5).$$

Dies ist ein Polynom vom Grad 8 und die Regel besagt, dass der Graph von $f(x)$ innerhalb der folgenden nicht-punktierten Bereiche verläuft:



Ungefähr könnte der Graph wie folgt aussehen:



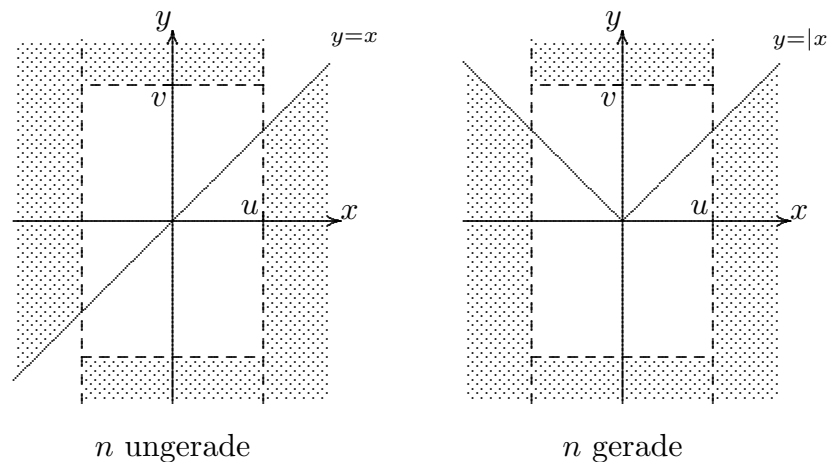
Satz. Sei $f(x)$ ein normiertes Polynom mit Grad $n \geq 2$. Dann gibt es positive reelle Zahlen u, v mit folgenden Eigenschaften:

- Ist $|x| \leq u$, so ist $|f(x)| \leq v$.
- Ist $x \geq u$, so ist $f(x) \geq x$.
- Ist $x \leq -u$, so ist

$$f(x) \leq x \quad \text{falls } n \text{ ungerade}$$

$$f(x) \geq -x \quad \text{falls } n \text{ gerade}$$

Der Graph von $f(x)$ verläuft also innerhalb der folgenden nicht-punktierten Bereiche:



Beweis: Sei a eine reelle Zahl mit $|a_i| \leq a$ für alle i . Dann gilt für alle $x \geq 1$ und $i \leq n-1$

$$\pm a_i x^i \leq |a_i| x^i \leq a x^i \leq a x^{n-1},$$

und demnach ist

$$\sum_{i=0}^{n-1} -a_i x^i \leq \sum_{i=0}^{n-1} a x^{n-1} = n a x^{n-1},$$

also

$$n a x^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \geq 0.$$

Setzen wir also $u = \max\{2na, 1\}$, so ist für $x \geq u$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \\ &\geq 2na \cdot x^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \\ &= na \cdot x^{n-1} + na \cdot x^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \\ &\geq n a x^{n-1} \geq x \end{aligned}$$

(die letzte Abschätzung gilt wegen $n \geq 2$). Entsprechend erhält man die genannten Abschätzungen für $x \leq -u$.

Auf diese Weise haben wir u erhalten. Die Beschränktheit (B) auf dem Intervall $[-u, u]$ liefert die Schranke v .

Insbesondere gilt:

Jedes Polynom ungeraden Grads hat eine Nullstelle. (Zum Beweis verwende (Z).)

Jedes normierte Polynom geraden Grads ist nach unten beschränkt.

5.5. Interpolation.

Satz. Seien reelle Zahlen $x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_n$ gegeben, dabei seien die Zahlen x_i paarweise verschieden. Dann gibt es genau ein Polynom $f(x)$ mit Grad höchstens n , sodass gilt $f(x_i) = y_i$ für $0 \leq i \leq n$.

Beweis: **Eindeutigkeit.** Gilt $f(x_i) = y_i = g(x_i)$ für alle $0 \leq i \leq n$, so sind die Zahlen $x_0, \dots, x_n$ (paarweise verschiedene) Nullstellen der Funktion $f(x) - g(x)$. Diese Funktion ist ein Polynom vom Grad höchstens n . Da es mindestens $n + 1$ Nullstellen besitzt, muss es das Nullpolynom sein, also $f(x) = g(x)$.

Existenz: Lagrange-Interpolation. Setze

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

dies ist ein Polynom vom Grad n (beachte: der Nenner ist eine reelle Zahl verschieden von Null). Es gilt:

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } j \neq i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei nun

$$f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) p_i(x).$$

Dann gilt offensichtlich

$$f(x_j) = \sum_{i=0}^n f(x_i) p_i(x_j) = f(x_j),$$

denn die Summanden mit Index $i \neq j$ sind Null, derjenige mit Index $i = j$ ist $f(x_j) p_j(x_j) = f(x_j) \cdot 1 = f(x_j)$.

Hier die Formeln für $n = 1$ und $n = 2$. Im Fall $n = 1$ sind reelle Zahlen x_0, x_1, y_0, y_1 mit $x_0 \neq x_1$ gegeben. Wir erhalten das lineare Polynom

$$f(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

und es gilt $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1$.

Im Fall $n = 2$ sind $x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2$ gegeben, mit $x_0 \neq x_1 \neq x_2 \neq x_0$. Wir erhalten das quadratische Polynom

$$f(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

und es gilt $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$. Man beachte, dass der Grad von $f(x)$ nicht unbedingt 2 sein muss; man weiß nur $\text{grad } f(x) \leq 2$ (so ist für $y_0 = y_1 = y_2 = 0$ das Polynom $f(x)$ offensichtlich das Nullpolynom).

5.6. Rationale Funktionen.

Definition: Sind $f(x), g(x)$ Polynome und ist $g(x)$ nicht das Nullpolynom, so nennt man die Funktion

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

eine *rationale* Funktion. Der Definitionsbereich D_h von $h(x)$ ist die Menge der reellen Zahlen r mit $g(r) \neq 0$. Ist r eine Nullstelle von $g(x)$, so nennt man r eine *Singularität* der Funktion $h(x)$. Hat $g(x)$ den Grad m , so wissen wir, dass $g(x)$ höchstens m Nullstellen besitzt, also gibt es höchstens m Singularitäten. Der Definitionsbereich entsteht also aus $\mathbb{R}$ durch Weglassen der Singularitäten.

Man unterscheidet zwei Fällen: Sei x_0 eine Singularität von $h(x)$, also eine Nullstelle des Nenners $g(x)$.

- Fall 1. Ist x_0 auch Nullstelle des Zählers $f(x)$ und ist die Multiplizität t von x_0 als Nullstelle des Nenners kleiner oder gleich der Multiplizität von x_0 als Nullstelle des Zählers, so kann man im Zähler und Nenner t Faktoren $x - x_0$ wegekürzen: wir vergrößern auf diese Weise den Definitionsbereich um den Punkt x_0 (ansonsten ändert sich nichts an der Funktion). In diesem Fall spricht man von einer *hebbaren Singularität*.
- Fall 2: Entweder ist x_0 keine Nullstelle des Zählers oder aber die Multiplizität s von x_0 als Nullstelle des Zählers ist echt kleiner als die Multiplizität t von x_0 als Nullstelle des Nenners. In diesem Fall nennt man x_0 einen *Pol* der Ordnung $t - s$ (natürlich wird man auch in diesem Fall kürzen, also Zähler und Nenner durch $(x - x_0)^s$ teilen; dabei ändert sich nun nicht einmal der Definitionsbereich).