6. Die Exponentialfunktionen (und Logarithmen).

Eine ganz wichtige Klasse von Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bilden die Exponentialfunktionen

$$f(x) = c \cdot \exp(\lambda \cdot x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x},$$

hier sind λ, c feste reelle Zahlen (um Trivialfälle auszuschließen, wird noch vorausgesetzt, dass beide Zahlen λ, c von Null verschieden sind). Diese Funktionen dienen dazu, Wachstumsprozesse (und Zerfallsprozesse) zu beschreiben. Dabei ist $e = 2,71828...$ eine ganz bestimmte Zahl (genauso wichtig wie etwa π). Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist eine bijektive Funktion $\mathbb{R} \to \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$, die zugehörige Umkehrfunktion wird mit $\ln\colon \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\} \to \mathbb{R}$ bezeichnet und heißt der (natürliche) Logarithmus. Die Exponentialfunktionen sind gerade die Funktionen der Form

$$f(x) = c \cdot a^x,$$

wobei a, c reelle Zahlen sind, und **wobei $a > 0$ vorauszusetzen ist** (zusätzlich wird vorausgesetzt: $c \neq 0$, und $a \neq 1$.) Um die Funktion $x \mapsto c \cdot \exp(\lambda \cdot x)$ in der Form $x \mapsto c \cdot a^x$ zu schreiben, muss man nur

$$a = \exp(\lambda)$$

setzen, denn $\exp(\lambda \cdot x) = \big(\exp(\lambda)\big)^x = a^x$. Umgekehrt ist also

$$\lambda = \ln(a).$$

6.1. Die Exponentialfunktionen $\exp_a$

Zur Erinnerung: Die Definition von a^x (mit $a > 0$), und die wichtigsten Eigenschaften dieser Potenzbildung. Für alle reellen Zahlen x, y gilt

$$a^x > 0, \tag{1}$$

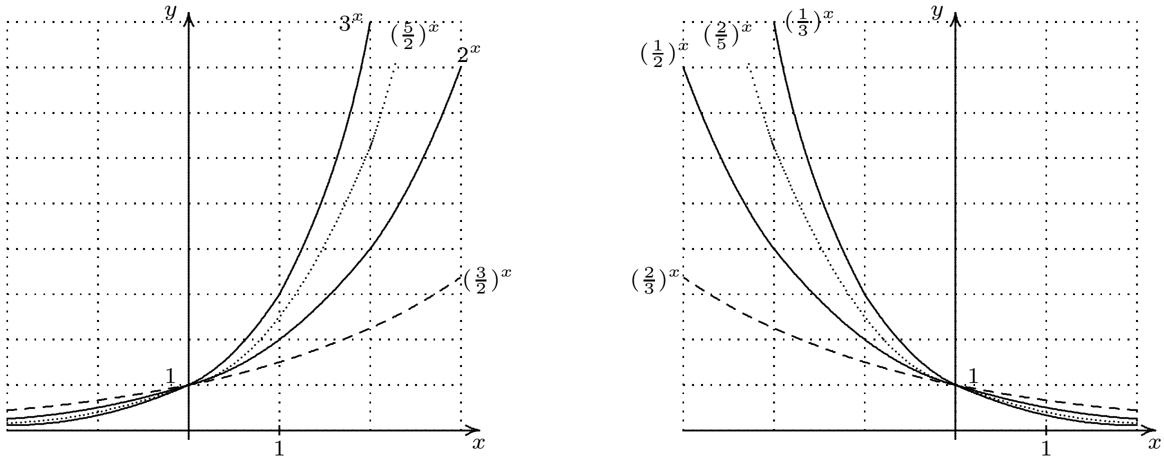
$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \tag{2}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}. \tag{3}$$

Zuerst wird a^x für natürliche Zahlen definiert: es ist $a^1 = a$, $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$, und so weiter (also $a^n = a \cdot \ldots \cdot a$ mit n Faktoren). Man setzt $a^0 = 1$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Man zeigt unmittelbar, dass für alle ganzen Zahlen x, y die beiden Aussagen (1), (2), (3) gelten. Nun betrachtet man Stammbrüche, etwa $\frac{1}{n}$, wobei n eine natürliche Zahl ist, und man setzt $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (also $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a}$, $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$, und so weiter). Entsprechend definiert man $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a}^m$ für jede ganze Zahl m und jede natürliche Zahl n. Wieder sieht man, dass die Aussagen (1), (2), (3) gelten. Schließlich wird eine beliebige reelle Zahl x durch rationale Zahlen $x_1, x_2, \ldots$ (etwa duch abbrechende Dezimalbrüche) approximiert, man bildet $a^{x_1}, a^{x_2}, \ldots$ und zeigt, dass die Folge dieser Zahlen gegen eine wohlbestimmte positive reelle Zahl konvergiert, die man dann als a^x bezeichnet. Man zeigt, dass die Regeln (2), (3) ganz allgemein gelten.

Für $a > 1$ ist die Exponentialfunktion $\exp_a(x) = a^x$ **streng monoton wachsend.**
Beweis: Man zeigt dies zuerst im Fall $x = 0$, mit Hilfe der Definition von a^y. Der allgemeine Fall folgt daraus: Es ist $a^y - a^x = a^x \cdot (a^{y-x} - 1) > 0$. Entsprechend ist die Exponentialfunktion $\exp_a(x) = a^x$ für $a < 1$ **streng monoton fallend.**

Hier zeigen wir links die Graphen der Funktionen a^x mit $a = \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3$, rechts die entsprechenden Graphen für $a = \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}$ und $\frac{1}{3}$



Berechnung der Ableitung der Funktion $f(x) = a^x$ im Punkt x: wir haben den folgenden Differenzenquotienten zu berechnen

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

und müssen h gegen Null gehen lassen:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f(x) \cdot f'(0)$$

Es fällt folgendes auf: *Die Funktion f' ist proportional zur Funktion f, mit dem Proportionalitätsfaktor $f'(0)$.*

Von besonderem Interesse ist der Fall $f'(0) = 1$. Dieser Fall ist gerade für $a = e$ mit der Euler'schen Zahl

$$e = 2,71828128459...$$

gegeben. Hier die genaue Definition von e:

$$e = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Hier müsste einiges bewiesen werden: dass das letzte Gleichheitszeichen gilt, und dass die so definierte Zahl gerade die Eigenschaft hat, durch die e definiert wird, nämlich $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$.

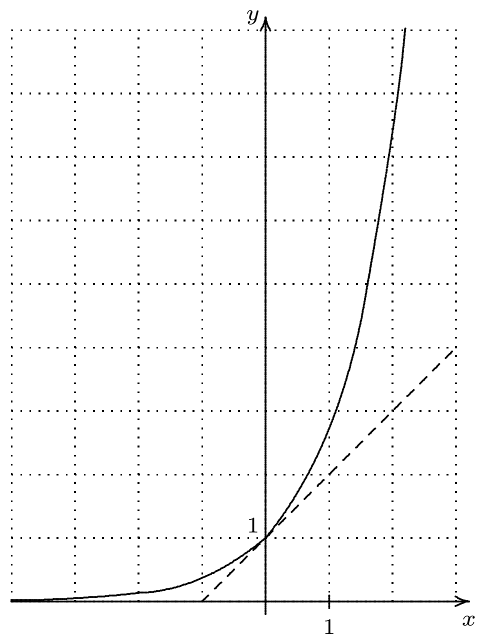
Beweise: [fehlen]

Für $a = e$ schreibt man einfach $\exp(x) = \exp_e(x)$ und nennt dies **die** Exponentialfunktion.

Nach Definition gilt:

$$f'(x) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Hier der Graph der Funktion $\exp(x)$, mit der Tangente im Punkt $(0, 1)$; sie hat, wie wir wissen, die Steigung 1.



Bei der Gleichung $f'(x) = f(x)$ handelt es sich um eine "Differentialgleichung".

Differentialgleichungen spielen in vielen Anwendungen der Mathematik eine ganz entscheidende Rolle, in den Natur- wie in den Wirtschaftswissenschaften. Im Anhang wird darauf kurz eingegangen.

Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist die (eindeutig bestimmte) Lösung der Differentialgleichung

$$f'(x) = f(x)$$

mit dem Anfangswert $f(0) = 1$. Man erhält eine effektive Rechenvorschrift durch die "Reihenentwicklung"

$$\exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots.$$

(Wenn wir die rechte Seite mit $g(x)$ bezeichnen, also $g(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}x^n$, so stellt man als erstes fest, dass diese unendlichen Summen für alle reelle Zahlen x wirklich reelle Zahlen liefern (man sagt, dass die Reihe *konvergiert*). Funktionen, die durch derartige konvergente Reihen gegeben sind, sind differenzierbar, und man erhält die Ableitung wie bei Polynomen durch gliedweises Differenzieren. Nun ist aber die Ableitung von x^n durch nx^{n-1} gegeben, also ist die Ableitung von $\frac{1}{n!}x^n$ gerade $\frac{n}{n!}x^{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$, also erhalten wir als Ableitung der rechten Seite $g'(x) = 0 + 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots = g(x)$. Wir sehen also, dass $g(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = y$ ist. Da auch die Anfangswert-Bedingung $g(0) = 1$ erfüllt ist, folgt $g(x) = \exp(x)$.)

Insbesondere folgt aus der Reihenentwicklung für $x = 1$, dass gilt:

$$e = \exp(1) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}.$$

6.2. Logarithmen Sei $a > 0$ und $a \neq 1$. Die Exponentialfunktion $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bildet $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ ab. Die Funktion

$$\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

ist injektiv und surjektiv, besitzt also eine Umkehrfunktion; diese wird mit $\log_a$ bezeichnet, also

$$\log_a\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

(man nennt diese Funktion den Logarithmus zur Basis a.) Es gilt also

$$\begin{array}{lll} \log_a \exp_a(x) = x & \text{für alle} & x, \\ \exp_a \log_a(y) = y & \text{für alle} & y > 0. \end{array}$$

Insbesondere ist also

$$\boxed{\ln e^x = x \qquad \text{für alle } x \quad \text{und} \qquad e^{\ln y} = y \qquad \text{für alle } y > 0.}$$

Rechenregeln für die Logarithmus-Funktionen (dabei seien $x, x_1, x_2 > 0$):

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \log_a(x_1x_2) & = & \log_a x_1 + \log_a x_2 \\ \log_a(\frac{x_1}{x_2}) & = & \log_a x_1 - \log_a x_2 \\ \log_a(x^y) & = & y \log_a x \\ \log_a(a) = 1 & \text{und} & \log_a(1) = 0 \end{array}}$$

Alle Logarithmenfunktionen $\log_a$ *sind zueinander proportional* und zwar gilt

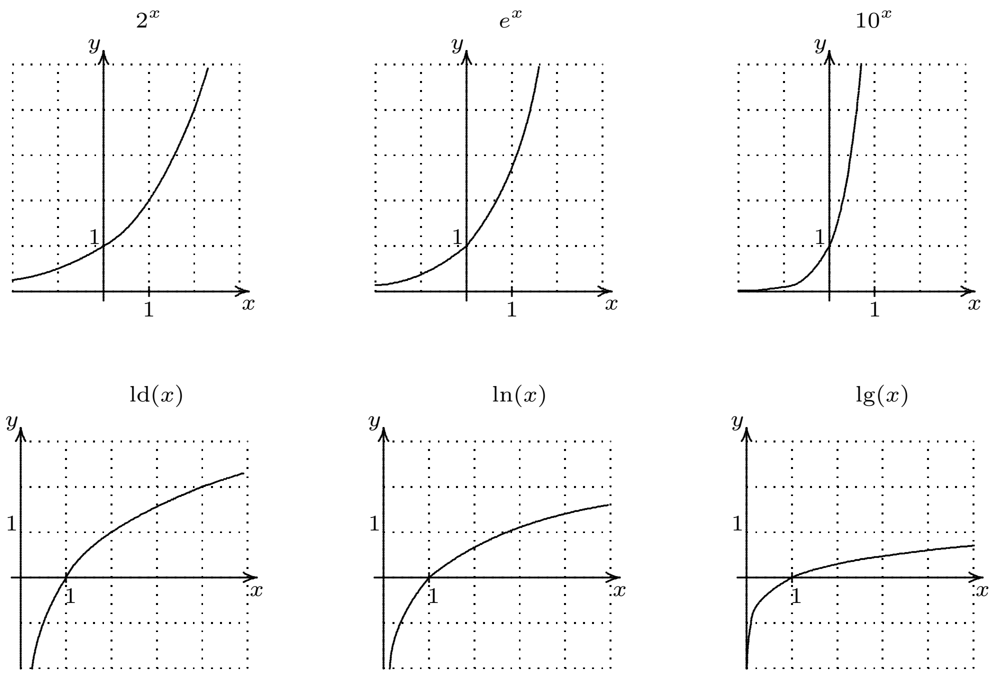
$$\boxed{\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x \qquad \text{für alle} \qquad x > 0.}$$

(Beweis: Setzen wir $y = \log_a x$, so ist $x = \exp_a y = a^y$. Demnach ist $\frac{1}{\ln a} \ln x = \frac{1}{\ln a} \ln a^y = \frac{1}{\ln a} y \ln a = y$.)

Für die speziellen Werte $a = 2, e, 10$ gibt es besondere Bezeichnungen für $\log_a$:

$\mathrm{ld} = \log_2$	der dyadische Logarithmus (oder Logarithmus dualis)
$\ln = \log_e$	der natürliche Logarithmus
$\lg = \log_{10}$	der gewöhnliche Logarithums

Hier sind, in der oberen Reihe, die Graphen der Expontentialfunktionen 2^x, e^x, 10^x, und, in der unteren Reihe, die zugehörigen Umkehrfunktionen $\mathrm{ld}\, x$, $\ln x$, $\lg x$ skizziert:



6.3. Momentane Wachstumsrate, Zuwachsrate pro Zeiteinheit und die Verdoppelungszeit.

Jede Exponentialfunktion $f(t) = c \cdot \exp(\lambda t)$ ist durch die beiden Parameter c, λ festgelegt.

Nun ist c nichts anderes als der **Anfangswert,** denn $f(0) = c \cdot \exp(\lambda \cdot 0) = c$. In den üblichen Beispielsituationen ist dieser Anfangswert gegeben (allerdings handelt es sich hier wieder um ein Skalierungs-Problem: welchen Wert auf der Zeitachse wählt man als Nullpunkt? — Im Beispiel des Bevölkerungswachstums werden wir 1970 als Nullpunkt wählen. Genauso gut könnte man 1900 als Nullpunkt wählen; natürlich wären dann alle Werte entsprechend umzurechnen!)

Wir betrachten nun den Parameter λ, dies ist der wirklich interessante Parameter. Statt λ selbst zu betrachten, interessiert man sich häufig für die folgenden beiden Zahlen $e^{\lambda} - 1$ und $\frac{\ln 2}{\lambda}$, die durch λ eindeutig bestimmt sind, aus denen sich aber auch umgekehrt λ wieder berechnen lässt! Dies ist sehr wichtig: *Ist eine der Zahlen λ, $e^{\lambda} - 1$, $\frac{\ln 2}{\lambda}$ bekannt, so lassen sich die beiden anderen ganz einfach berechnen.*

Ist $\overline{\lambda} = e^{\lambda} - 1$ bekannt, so ist $\lambda = \ln(\overline{\lambda} + 1)$. Entsprechend berechnen wir bei Vorgabe von $d = \frac{\ln 2}{\lambda}$ den Wert von λ durch $\lambda = \frac{\ln 2}{d}$.

Die Bedeutung dieser drei Zahlen:

$$\lambda, \qquad \overline{\lambda} = e^{\lambda} - 1 \qquad \text{und} \qquad d = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Wir betrachten zuerst den Fall $\lambda > 1$, in diesem Fall handelt es sich bei $f(t)$ um eine Funktion, die ein echtes Wachstum beschreibt; es ist $f(t) < f(t')$ für $t < t'$ (die Funktion f ist also streng monoton wachsend).

Die Zahl λ ist die **(momentane) Wachstumsrate**, denn, wie wir wissen, gilt:

$$\boxed{f'(t) = \lambda \cdot f(t)}$$

(die Ableitung $f'(t)$ beschreibt ja das Wachstum der Funktion $f(t)$; aus der Gleichung lesen wir ab, dass das Wachstum proportional zum Bestand $f(t)$ ist, wobei λ gerade die Proportionalitätskonstante ist).

Was ist die Bedeutung von $\overline{\lambda} = e^{\lambda} - 1$? Dies ist die **Zuwachsrate pro Zeiteinheit,** denn es gilt

$$\boxed{f(t+1) - f(t) = \overline{\lambda} f(t)}$$

die Differenz $f(t+1) - f(t)$ bescheibt die Zunahme pro Zeiteinheit; die Gleichung besagt ein weiteres proportionales Verhalten: *Zunahme pro Zeiteinheit ist zum Bestand $f(t)$ proportional,* und zwar mit der Proportionalitätskonstante $\overline{\lambda}$. Also: *Die Zunahme pro Zeiteinheit ist das $\overline{\lambda}$-fache des Bestands.* Der Beweis ist ganz einfach:

$$\begin{aligned} f(t+1) - f(t) &= ce^{\lambda(t+1)} - ce^{\lambda t} \\ &= ce^{\lambda t}(e^{\lambda} - 1) = (e^{\lambda} - 1) f(t). \end{aligned}$$

Die Zahl $d = \frac{\ln 2}{\lambda}$ schließlich ist die **Verdoppelungszeit**, denn es gilt

$$\boxed{f(t+d) = 2 \cdot f(t),}$$

also, in Worten: *Der Wert verdoppelt sich, wenn statt des Zeitpunkts t der Zeitpunkt $t+d$ betrachtet wird.* Eine andere Formulierung: *Nach Ablauf der Zeit d hat sich der Bestand verdoppelt.* Auch dies ist eine einfache Rechnung: Wegen $\lambda d = \lambda \frac{\ln 2}{\lambda} = \ln 2$ gilt $e^{\lambda d} = 2$, und daher:

$$f(t+d) = c \cdot e^{\lambda(t+d)} = c \cdot e^{\lambda t + \lambda d} = c \cdot e^{\lambda t} \cdot e^{\lambda d} = f(t) \cdot e^{\lambda d} = 2 \cdot f(t).$$

Hier muss man unterscheiden, ob λ positiv oder negativ ist:

- Ist λ positiv, so ist auch $d(\lambda)$ positiv: der Zeitpunkt, an dem der Bestand sich verdoppelt hat, liegt also in der Zukunft.
- Ist dagegen λ negativ, so ist die "Verdoppelungszeit" $d(\lambda)$ negativ. Man betrachtet daher lieber $h(\lambda) = -d(\lambda)$ und nennt dies die **Halbwertszeit.** Für $\lambda < 0$ beschreibt $f(t)$ einen **Zerfallsprozess:** die "Zuwachsrate" ist negativ, (und ist ja eigentlich eine "Schwundrate"). Für die Halbwertszeit $h(\lambda) = -d(\lambda) = -\frac{\ln 2}{\lambda}$ gilt wirklich
$$f(t+h) = \tfrac{1}{2} \cdot f(t).$$

Hier noch einmal die Umrechnungsformeln:

Ist λ gegeben, so ist

$$\boxed{\overline{\lambda} = e^{\lambda} - 1 \qquad \text{und} \qquad d(\lambda) = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

Ist $\overline{\lambda}$ gegeben, so ist

$$\boxed{\lambda = \ln(\overline{\lambda} + 1) \qquad \text{und} \qquad d(\lambda) = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

Ist $d(\lambda)$ gegeben, so ist

$$\boxed{\lambda = \frac{\ln 2}{d(\lambda)} \qquad \text{und} \qquad \overline{\lambda} = e^{\lambda} - 1}$$

Wir werden im nächsten Abschnitt das Auftreten von Exponentialfunktionen $f(t) = a \cdot e^{\lambda t}$ diskutieren, dabei stellt sich immer die Frage, wie man den Parameter λ bestimmt - als **momentane** Wachstumsrate kann man λ selbst nicht messen, also bestimmt man meist entweder $\overline{\lambda}$ oder die Verdoppelungs- oder Halbwertszeit. Beachte: Ist $0 < \lambda$ nah bei Null, so sind die Zahlen λ und $\overline{\lambda}$ sehr ähnlich: hier einige Werte

λ	$0,01$	$0,02$	$0,03$	$0,04$	$0,05$	$0,10$	$0,50$
$\overline{\lambda}$	$0,01005$	$0,02020$	$0,03046$	$0,04081$	$0,05127$	$0,10517$	$0,64872$

6.4. Beispiele für das Auftreten von Exponentialfunktionen.

(1) **Zinseszins.** Beispiel: Der Anfangsbetrag von 200 EUR wird jährlich mit 5 % verzinst, nach einem Jahr besitzt man 200·(1,05) EUR = 210 EUR, im zweiten Jahr werden nun diese 210 EUR mit 5 % verzinst, also besitzt man am Ende des zweiten Jahres 210·(1,05) EUR, usw. Ohne Zwischenrechnung kann man notieren: am Ende des zweiten Jahres besitzt man $200 \cdot (1,05) \cdot (1,05)$, also $200 \cdot (1,05)^2$ EUR. Entsprechend besitzt man am Ende des t-ten Jahres $200 \cdot (1,05)^t$ EUR.
Die allgemeine Formel lautet demnach: Ist K_0 der Anfangsbetrag, und p der Prozentsatz, so besitzt man nach t Jahren den Betrag $K(t)$

$$K(t) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t .$$

Es ist also

$$K(t) = K_0 \cdot \exp(\lambda \cdot t) \qquad \text{mit} \qquad \lambda = \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Anders ausgedrückt: Es ist

$$e^\lambda = 1 + \frac{p}{100}, \qquad \text{also} \qquad \overline{\lambda} = e^\lambda - 1 = \frac{p}{100}$$

Der Zinssatz $\frac{p}{100}$ ist die Zuwachsrate pro Zeiteinheit (was denn sonst?); die Formel $\lambda = \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ besagt gerade, wie man die momentane Wachstumsrate aus der Zuwachsrate pro Zeiteinheit berechnet.

(2) **Inflation.** Verteuern sich Waren im Wert von 100 EUR innerhalb eines Jahres durchschnittlich um 3 EUR, so spricht man von einer *Inflationsrate* von 3 %. Betrachtet man einen durchschnittlichen Warenkorb im Wert von 200 EUR, so kostet er nach einem Jahr 200·(1,03) (= 206) EUR. Liegt die Inflationsrate im folgenden Jahr erneut bei 3 %, so kostet dieser Warenkorb nach zwei Jahren $200 \cdot (1,03) \cdot (1,03)$ EUR. Allgemein gilt also: Ist P_0 der Preis eines durchschnittlichen Warenkorbs zum Zeitpunkt $t = 0$, und ist die Inflationsrate über Jahre hinweg konstant p %, so kostet dieser Warenkorb nach t Jahren den Preis

$$P(t) = P_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t ,$$

also

$$P(t) = P_0 \cdot \exp(\lambda \cdot t) \qquad \text{mit} \qquad \lambda = \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

(Auch hier berechnen wir also λ aus der Zuwachsrate pro Zeiteinheit: die Zuwachsrate pro Zeiteinheit ist wieder $\frac{p}{100}$.)

Zu (2) und (3): **Kaufkraft-Vergleich.** Das Grundkapital $K_0 = 10\,000$ EUR werde zwei Jahre lang festgelegt, der Zinssatz betrage 3 %. Im ersten Jahr sei die Inflationsrate 2 %, im zweiten Jahr 4 %. Dann gilt: $K(2) = 10000 \cdot (1,03)^2$ EUR $= 10\,609$ EUR.
Entsprechend betrachten wir einen Warenkorb mit Preis $P_0 = 10\,000$ EUR. Nach zwei Jahren zahlt man für diese Waren $P(2) = 10\,000 \cdot (1,02) \cdot (1,04)$ EUR $=$ 10 608 EUR. Man sieht: Die Kaufkraft des festgelegten Geldes hat sich (wenn auch nur geringfügig) erhöht.
Bei einem drartigen Kaufkraft-Vergleich betrachtet man für festes $K_0 = P_0$, welche der beiden Zahlen $K(t), P(t)$ größer ist; man könnte also die Differenzfunktion $K(t) - P(t)$ betrachten, aber **Warnung:** Auch wenn die beiden Funktionen $K(t)$ und $P(t)$ Exponentialfunktionen sind, so ist die Funktion $K(t) - P(t)$ im allgemeinen **keine** Exponentialfunktion, sondern eben eine Differenz zweier Exponentialfunktionen (also zum Beispiel von der Form $e^{\lambda t} - e^{\lambda' t}$); es gelten für die Differenzfunktion nicht ganz so einfache Rechenregeln!

(Sei etwa der Zinssatz 3 %, die Inflationsrate 2 %, und der Anfangsbetrag sei $K_0 = P_0 = 10\,000$ EUR. Dann ist $K(1) - P(1) = 100$, also 1 %, und dies ist auch gerade die Differenz der Prozentsätze. Für $t = 2$ erhält man dagegen $K(2) - P(2) = 205$, während die Multiplikation mit $(1,01)^2$ den Ausgangsbetrag 10 000 EUR nur um 201 EUR erhöht.)

(3) **Bevölkerungswachstum.** Im Jahr 1970 lebten auf der Welt rund 3,7 Mrd. Menschen, im Jahr 1985 rund 4,8 Mrd. Unterstellt man, dass es hierbei um exponentielles Wachstum handelt, so beschreibt folgende Funktion die Weltbevölkerung im Jahr $1970 + t$

$$K(t) = 3,7 \cdot 10^9 \cdot e^{0,017t}.$$

Die Verdoppelungszeit ist demnach $d_\lambda = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{0,017} \approx 41$, d.h. alle 41 Jahre verdoppelt sich die Weltbevölkerung.

(4) **Wachstum einer Zellkultur.** Sei n die Anzahl der Zellen einer Zellkultur zum Zeitpunkt $t = 0$, in jedem Zeitschritt verdopple sich die Anzahl. Sei $f(t)$ die Anzahl der Zellen zum Zeitpunkt t. Es ist also $f(1) = n \cdot 2$, $f(2) = n \cdot 2 \cdot 2 = n \cdot 2^2$, $f(3) = n \cdot 2^2 \cdot 2 = n \cdot 2^3$, und so weiter. Also allgemein

$$f(t) = n \cdot 2^t$$

oder, anders geschrieben:

$$f(t) = n \cdot 2^t = n \cdot \exp(\lambda \cdot t) \qquad \text{mit} \qquad \lambda = \ln 2$$

(Dies entspricht der allgemeinen Formel zur Bestimmung von λ, wenn die Verdopplungszeit bekannt ist: wir haben hier die Verdopplungszeit als Zeiteinheit gewählt, also $d = 1$ und demnach $\lambda = \frac{\ln 2}{1} = \ln 2$.)

(5) **Radioaktiver Zerfall.** Ist $N(t)$ die Anzahl radioaktiver Atome eines Atoms zur Zeit t, so gilt

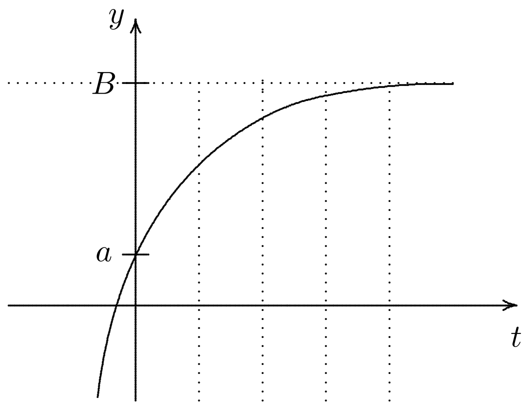
$$N(t) = N(0) \cdot e^{\lambda t};$$

dabei ist $N(0)$ die Anzahl dieser Atome zum (willkürlich gewählten) Zeitpunkt $t = 0$ und $\lambda < 0$ ist die momentane Zerfallsrate. Beispiele: Die Halbwertszeit von Jod 131 liegt bei etwa 8 Tagen, die von Caesium 137 bei etwa 30 Jahren, die von Plutonium 239 bei 24 000 Jahren. Aus diesen Halbwertszeiten h lässt sich sofort λ mit Hilfe der Formel $\lambda = -\frac{\ln 2}{h}$ bestimmen.

(6) **Beschränktes Wachstum: Bertalanffy-Funktionen.** Bertalanffy (1901-1972) schlug vor, beschränktes Wachstum durch Funktionen

$$f(t) = B - (B - a)\exp(-\lambda t)$$

zu simulieren.



Die Bedeutung der Parameter ist die folgende: B ist die Wachstumsschranke, $a = f(0)$ ist der Anfangswert, also der Bestand zum Zeitpunkt $t = 0$ und schließlich ist $f'(0) = \lambda \cdot (B - a)$, also $\lambda = f'(0)/(B - a)$.

(7) **Die barometrische Höhenformel.** Der Luftdruck $p(x)$ nimmt bei gleichbleibender Temperatur mit zunehmender Höhe x über dem Meeresspiegel exponentiell ab, es gilt also $p(x) = p_0 \cdot e^{-\lambda x}$ mit einer geeigneten Konstanten $\lambda(\approx -\frac{1}{8})$; dabei ist p_0 der Luftdruck auf Meereshöhe NN. Umgekehrt kann man diese Formel verwenden, um die Höhe über NN zu berechnen, wenn man den Luftdruck kennt.

(8) In Seen und im Meer kann pflanzliches Leben nur in der obersten Wasserschicht, ungefähr bis 10 Meter Tiefe existieren, da das Tageslicht vom Wasser nach und nach absorbiert wird. Nach dem **Gesetz von Bouguer-Lambert** berechnet sich die Intensität $I(x)$ eines vertikalen Lichtstrahls, der mit der Lichtintensität I_0 ins Wasser eintritt, in einer Tiefe von x Metern durch

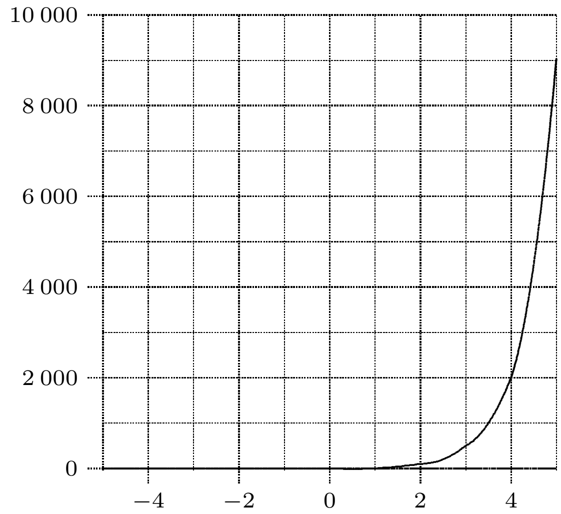
$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu x},$$

dabei heißt μ der Absorptionskoeffizient (er ist von der Reinheit des Wassers und der Wellenlänge des Lichts abhängig). Für reines Meerwasser und Sonnenlicht hat μ ungefähr den Wert 1,4 m^{-1}.

4.5. Logarithmisches Papier. Ist man an Werten einer Exponentialfunktion interessiert, so versagt die übliche Visualisierung durch den Funktionsgraphen sehr schnell. Betrachten wir zum Beispiel die Funktion

$$f(x) = 5 \cdot e^{\frac{3}{2}x}.$$

Hier der Graph dieser Funktion über dem Intervall $[-5; 5]$.



Ist man am Wert $f(5)$ interessiert, so braucht man auf der y-Skala den Bereich bis 10 000 (denn $f(5) \approx 9040$); Funktionswerte für negative x (selbst Werte für $x \leq 2$) kann man dann keinesfalls ablesen. Es ist $f(-5) \approx 0,0028$, wie sollte man das sehen?

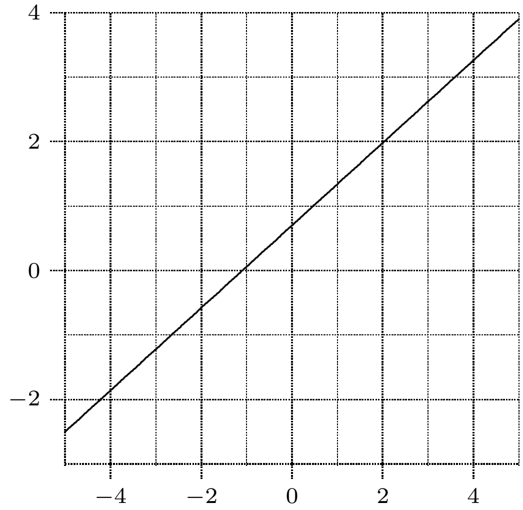
Statt der Funktion $f(x)$ betrachten wir die Funktion

$$g(x) = \lg f(x),$$

es wird sich zeigen, dass der Graph dieser Funktion $g(x)$ sehr viel mehr Information liefert. Wegen $e^{\frac{3}{2}} = 10^{0,65}$ (der Exponent $0,65$ ist $\frac{3}{2} \lg e$) gilt $f(x) = 5 \cdot e^{\frac{3}{2}x} = 5 \cdot 10^{0,65x}$. Demnach ist

$$g(x) = \lg f(x) = \lg(5 \cdot 10^{0,65x}) = \lg 5 + 0,65 \cdot x,$$

dies ist also eine lineare Funktion $g(x) = a + bx$ mit $a = \lg 5$ und $b = 0,65 (= \frac{3}{2} \lg e)$.

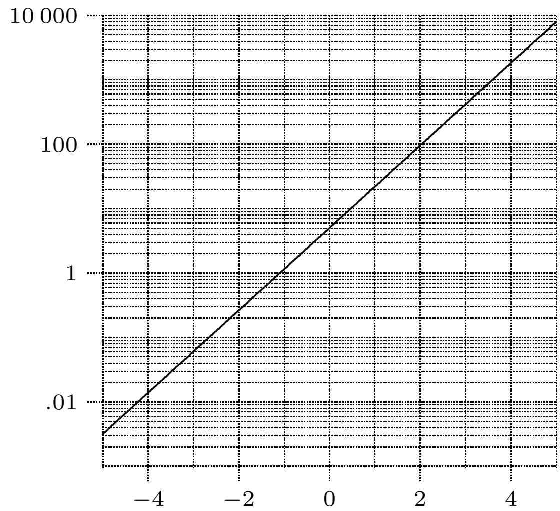


Da $g(x)$ eine lineare Funktion ist, ist der Graph von $g(x)$ eine Gerade, also etwas sehr Übersichtliches! Wir können mit Hilfe dieser Geraden unproblematisch alle Funktionswerte über dem Intervall $[-5, 5]$ ablesen. Zum Beispiel erhalten wir $g(-5) \approx -2,55$ und $g(5) \approx 3,96$.

Will man nun mit dem Graphen von $g(x)$ arbeiten, um Werte der Funktion $f(x)$ zu bestimmen, so empfiehlt es sich, die y-Achse anders zu beschriften: Es ist

$$f(x) = 10^{g(x)};$$

die y-Werte, die wir durch die Funktion $g(x)$ erhalten, sind also gerade die Exponenten zur Basis 10 der gesuchten Funktionswerte von $f(x)$. Wir ersetzen die bisherige Beschriftung der y-Achse $-3,\ -2, \ldots,\ 3,\ 4$ durch die entsprechenden Zehnerpotenzen $10^{-3},\ 10^{-2}, \ldots,\ 10^{3},\ 10^{4}$ und erhalten folgendes Bild:



dabei wurde eine Feinrasterung durch horizontale Punktreihen eingearbeitet, die es erlaubt, auch Zwischenwerte abzulesen. Zum Beispiel gibt es zwischen den Werten 1 und 10 auf der y-Achse acht derartige Punktreihen, sie entsprechen gerade den Werten $2, 3, \ldots, 8, 9$ (also eigentlich $\lg 2, \lg 3, \ldots, \lg 8, \lg 9$). Man nennt eine derartige Skalierung der y-Achse eine **logarithmische Skala.** Betrachtet man eine logarithmische Skala, so fällt auf, dass die Beschriftung durch Zehnerpotenzen erfolgt, in unserem Beispiel von 10^{-3} bis 10^4 (die entsprechenden Logarithmen sind -3 bis 4). Während bei einer normalen linearen Skala der Abstand zwischen den ganzen Zahlen z und $z+1$ jeweils gleich ist, ist hier der Abstand zweier benachbarter Zehnerpotenten 10^z und 10^{z+1} gleich, man nennt diesen Abstand eine *Dekade* (unser Beispiel zeigt also 7 Dekaden).

Zur Verwendung von logarithmischem Papier. Man verwendet logarithmisches Papier zum Eintragen von Versuchsdaten, wenn man annimmt, dass die Abhängigkeit der Versuchsdaten (x_i, y_i) durch eine Exponentialfunktion $f(x) = c \cdot e^{\lambda x}$ beschrieben wird (dabei nimmt man als x-Achse eine lineare Skala, als y-Achse eine logarithmische Skala). Liegen die Versuchsdaten (x_i, y_i) auf einer Geraden, so bestätigt dies die Annahme. Liegen die Versuchsdaten (x_i, y_i) zumindest in der Nähe einer Geraden, so sucht man zuerst eine entsprechende Ausgleichsgerade.

Wir gehen nun davon aus, dass eine Gerade auf unserem logarithmischen Papier gegeben ist. Diese Gerade beschreibt eine Funktion $f(x) = c \cdot e^{\lambda x}$ und wir suchen die Parameter c und λ. Den Parameter c liest man sofort ab, zumindest wenn die x-Achse den Eintrag $x = 0$ enthält, denn es ist $c = f(0)$.

Wie findet man λ ? Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Meist wird vorgeschlagen, ein zugehöriges Steigungsdreieck zu bestimmen. Einfacher erscheint folgender Weg: Wir gehen davon aus, dass $c = f(0)$ schon bestimmt ist. Suche x_0 mit $f(x_0) = 10 \cdot c$. Für $\mu = \frac{1}{x_0}$ gilt dann $f(x) = c \cdot 10^{\mu x}$.

Oder auch: man nimmt sich einen x-Wert x_0 und den zugehörigen y-Wert $y_0 = f(x_0)$ und löst die Gleichung $y_0 = c \cdot e^{\lambda x_0}$ nach λ auf:

$$\lambda = \frac{1}{x_0}(\ln y_0 - \ln c).$$

Die Werte auf der rechten Seite sind bekannt: c durch vorangegangene Überlegungen, x_0, y_0 durch Ablesen eines Punktes auf unserer Geraden.

Hinweis: Man sieht, dass man zur Bestimmung der Parameter c, λ nur zwei Wertepaare (x, y) braucht; aber das ist klar: jede Gerade ist durch zwei ihrer Punkte bestimmt, jede Exponentialfunktion f ist durch zwei Punkte auf dem Graphen von f bestimmt. Dass man üblicherweise viele Datenpaare (x_i, y_i) bestimmt, dient vor allem dem Zweck, dass man feststellen will, ob überhaupt eine exponentielle Abhängigkeit der y-Werte von den x-Werten vorliegt!

Das logarithmische Papier, das wir hier verwendet haben, ist "einfach-logarithmisch": eine der beiden Achsen ist linear, die andere logarithmisch, und wir haben es bisher nur auf folgende Weise eingesetzt: als x-Achse haben wir die lineare Achse genommen, als y-Achse die logarithmische, und zwar zur Darstellung von Exponentialfunktionen. Natürlich kann man das Blatt auch drehen, so dass die x-Achse logarithmisch und die y-Achse linear ist – dies empfiehlt sich, wenn eine Logarithmus-Funktion gegeben ist. Es gibt auch "doppelt-logarithmisches" Papier, hier sind beide Achsen logarithmisch; derartiges Papier werden wir einsetzen, um Potenzfunktionen darzustellen.

Zusatz. Das Ablesen bei logarithmischen Skalen muss man üben! Wegen

$$\lg(1) = 0, \quad \lg(3) \approx 0,49, \quad \lg(10) = 1$$

sieht man, dass der Wert 3 ziemlich genau in der Mitte zwischen 1 und 10 liegt.

Wegen

$$\lg(1) = 0, \quad \lg(2) \approx 0,3, \quad \lg(5) \approx 0,6, \quad \lg(10) = 1$$

liefern die Werte 2 und 5 zumidnest ungefähr eine Drittelung des Intervalls zwischen 1 und 10.

Hier folgen zwei typische Abschnitte logarithmischer Skalen, links mit 3 Zwischenstrichen zwischen 1 und 10, rechts mit 6 langen (und sosätzlich zwei kurzen) Ziwschenstrichten zwischen 1 und 10. Wir notieren jeweils die Werte, die diesen Strichen entsprechen: