8. Funktionen.

8.1 Funktionen mit ähnlichem Aussehen.

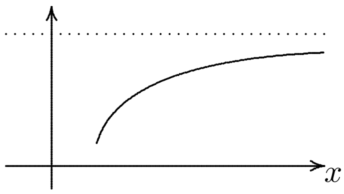
Beim Studium spezieller Funktionen zeigt sich, dass ganz verschiedenartige Funktionen durchaus ähnliche Verhaltensweisen zeigen können. Sucht man bei einer Modellierungsfrage nach einer Funktion, die den Sachverhalt einigermaßen zutreffend beschreiben könnte, so sollte man dies vor Augen haben. Die wichtigsten derartigen Parallelen werden hier zusammengestellt.

(1) Monotones Wachstum mit Sättigung:

Hier kennen wir

- erstens die logistischen Funktionen,
- zweitens die Michaelis-Menton-Funktionen,
- drittens die Bertalanfani-Funktionen.

Alle drei Funktionsklassen liefern für großes x einen Kurvenverlauf der Form



haben also eine Wachstums-Schranke (oder Sättigung); dies betrifft das Verhalten für große x-Werte. Die drei Funktionsklassen haben aber für $x < 0$ ganz verschiedenartige Verhaltensweisen. Bei den logistischen Funktionen geht man von einem exponentiellen Wachstum in der Vergangenheit aus, alle Werte sind aber positiv. Im Gegensatz dazu liefern die Michaelis-Menton- und die Bertalanfani-Funktionen auch negative Werte.

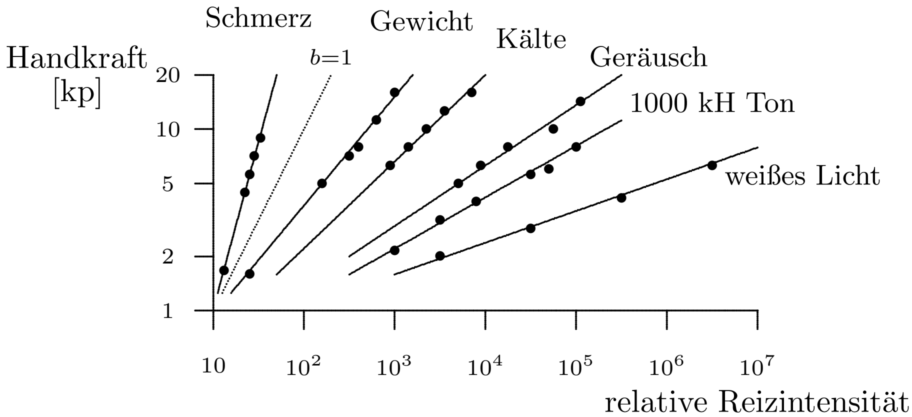
(2) Unbeschränktes, aber immer stärker gebremstes monotones Anwachsen.

- Zu nennen sind hier einerseits die Logarithmus-Funktionen,
- anderseits die Potenzfunktionen x^b mit $0 < b < 1$.

Beide Funktionsklassen werden zur Modellierung von Sinnesempfindungen verwendet. Zuerst soll hier an die Weber-Fechner-Formel erinnert werden: *Die Stärke der Sinnesempfindung ist eine lineare Funktion vom Logarithmus der Stärke des physikalischen Reizes.* Dabei muss folgende Warnung ausgesprochen werden: Hier wird die "Stärke der Sinnesempfindung" als quantitative Größe **definiert**; dies ist durchaus eine willkürliche Setzung. Kann eine Sinnesempfindung nicht objektiv gemessen werden, so liefert die Weber-Fechner-Formel sicher einen nützlichen Weg zu einer ersten Skalierung der Empfindung. Manchmal gibt es aber Modellbildungen, die zu anderen (und besseren) Skalierungen führen: Um 1950 hat S.S.STEVENS vorgeschlagen, die Stärke von Sinnesempfindungen wirklich experimentell zu messen: zum Beispiel kann man die Empfindungsintensität durch ein Hand-Dynamometer zu messen: Je stärker der Reiz, desto größer wird die auf das Dynamometer ausgeübte Kraft sein. Die Abhängigkeit dieser (nun physikalisch gemessenen) Empfindungsintensität E von der (ebenfalls physikalisch gemessenen) Reizintensität r läßt sich recht gut durch Potenzfunktionen der Form

$$E(r) = k(r - r_0)^b$$

(mit reellen Konstanten k, b) beschreiben; auf doppelt-logarithmischem Papier erhält man Geraden der Form



Wie wir wissen, läßt sich der Exponent b an der jeweiligen Steigung dieser Geraden ablesen und üblicherweise erhält man Exponenten mit $0,5 \leq b \leq 3,5$ (die Graphen sind dem Buch von Reißland entnommen).

Hier sehen wir, dass es manchmal sehr verschiedenartige Versuche, Vorgänge in der Natur durch mathematische Modelle zu beschreiben, geben kann: Einerseits gibt es die **logarithmische** Skala des Lautstärke-Pegels, andererseits die Stevens'sche **Potenzfunktion** der Lautstärkeempfindung. In derartigen Fällen ist es oft gar nicht einfach zu entscheiden, welches Modell besser ist. Immerhin ist daran zu erinnern, daß gerade biologische und physiologische Meßwerte mit großen Fehlertoleranzen versehen sind; dies gilt insbesondere für Meßwerte, die Empfindungen betreffen.

(3) Parabel und Kettenlinie.

Hier soll nun kurz noch eine Funktionsklasse vorgestellt werden, deren Graphen parabelähnlich, aber eben keine Parabeln sind: die Kettenlinien.

Eine Kettenlinie erhält man, wenn eine Kette (ein Seil) zwischen zwei Aufhängungspunkten frei durchhängt; die Form des Durchhängens wird von der Lage der Aufhängepunkte und der Länge der Kette bestimmt, nicht jedoch von ihrem Gewicht. Es handelt sich hierbei um Lösungen der Differentialgleichung

$$f''(x) = k\sqrt{1 + f'(x)^2},$$

man erhält die Differentialgleichung durch physikalische Überlegungen: die Kraft wirkt jeweils längs der Kette, ihre y-Komponente nimmt proportional zur Länge der Kette zu.

Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx})$$

ist eine Lösung dieser Differentialgleichung, sie liefert also eine **Kettenlinie;** meist schreibt man diese Funktionen mit Hilfe von $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, dem *Cosinus hyperbolicus.* Die mathematische Beschreibung der Kettenlinien stammt von Leibniz, Huygens und Johann Bernoulli (1690); noch Galilei glaubte, daß es sich bei der Kettenlinie um eine echte Parabel handele. Daß der Graph von $\frac{1}{2k}(e^{kx}+e^{-kx})$ parabel-ähnlich ist, ist offensichtlich: man addiert ja zur Exponentialfunktion $\frac{1}{2k}e^{kx}$ die an der y-Achse gespiegelte Funktion $\frac{1}{2k}e^{-kx}$. Aber natürlich ist dies **keine** Parabel!

(4) Glockenkurven.

- Zu nennen ist hier einerseits die Gaußsche Glockenkurve e^{-1/x^2}, die in der Statistik eine herausragende Bedeutung besitzt,
- anderseits die rationale Funktion $1/(x^2 + 1)$.

8.2. Linearität.

Unser Bericht über die wichtigsten Funktionsklassen begann mit den linearen Funktionen, und wir sahen dort eine Fülle von Aufgabenstellungen aus Algebra und Geometrie, vor allem aber auch viele Anwendungssituationen, die zu linearen Funktionen führen.

Proportionalität muss als wesentliches Grundphänomen angesehen werden. Dabei ist es nicht nur die Proportinalität von Zahlenpaaren, die von Interesse ist: Ganz wichtig ist die Frage nach der Proportionalität von Funktionen. So sind die Exponentialfunktionen $f(t) = \exp(\lambda t)$ dadurch charakterisiert, dass hier Funktion und Ableitung zueinander proportional sind (mit Proportionalitätsfaktor λ): *Wachstum ist proportional zum Bestand.* Auch haben wir gesehen, dass alle Logarithmus-Funktionen zueinander proportional sind.

Komplizierte Funktionsgraphen lassen sich üblicherweise nur sehr schwer identifizieren, man denke etwa an die Frage, inwieweit sich das Wachstumsverhalten von logarithmischen Funktion und der Steven'schen Potenzfunktionen voneinander unterscheidet. Dagegen sind natürlich Geraden immer einfach zu identifizieren. Dies führt dazu, dass man versucht, durch geeignete Tricks, wie die Verwendung von speziellen Skalen, gegebene gekrümmte Graphen in Geraden zu überführen. Wir haben dies bei der Verwendung von logarithmischem und doppelt-logarithmischem Papier kennengelernt.

Schliesslich soll noch darauf hingewiesen werden, dass die Grundmethoden der Analysis (das Differenzieren und Integrieren) lineares Verhalten von beliebigen Funktionen thematisieren:

- Differenzieren: Hier arbeitet man mit lokaler Linearität: eine Funktion f ist genau dann in einem Punkt x_0 differenzierbar, wenn sie in der Nähe von x_0 beliebig genau durch eine lineare Funktion apporximiert werden kann.
- Das Integrieren einer Funktion über einem Intervall läuft darauf hinaus, den zugehörigen Mittelwerte zu bilden, also die Funktion mit einer konstanten Funktion

zu vergleichen. Und natürlich wird beim Integrieren eine vorgegebene Funktion mit Hilfe von Treppen-Funktionen approximiert.

8.3. Vergleich: Zahlen, Funktionen.

Hier sollte nun die Bedeutung des Arbeitens mit Funktionen herausgearbeitet werden.

[fehlt]

Stichworte:

- Heymann: Sieben Jahre sind genug.
- Sonderschule, Hilfsschule, Förderschule.
- Fuld.
- Kramer.

8.4. Sprache und funktionales Denken.

Es ist überraschend, wie viele Vokabeln, die im täglichen Leben gebraucht werden, eine funktionale Bedeutung haben. Dabei stellt sich heraus, dass verbal Verhaltensweisen benannt werden, die man quantitativ nur mit höheren Ableitungen in den Griff bekommen kann.

Dies betrifft natürlich alle Ausdrücke, die zur Beschreibung von **Bewegungen** verwendet werden:

Geschwindigkeit, mit rasanter Geschwindigkeit (1.Ableitung)

Beschleunigung (2.Ableitung)

Auch alle Formulierungen, die etwa das **Wirtschaftswachstum** beschreiben, sind hier zu nennen:

Es geht aufwärts (oder abwärts) (1.Ableitung)

Der Aufschwung nimmt ab (2.Ableitung).

Die Abnahme des Aufschwungs ist gebremst (3.Ableitung!)

Schließlich verweisen wir noch auf die Beschreibung periodischer Phänomene, aber auch auf Trend-Analysen.

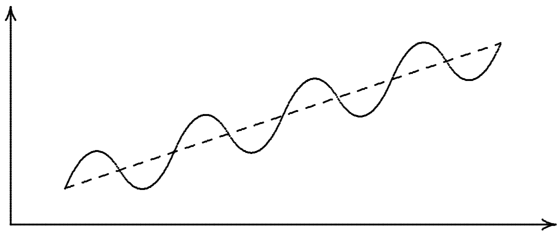
8.5. Operationen, Rechenregeln

Für das Arbeiten mit Funktionen gibt es Rechenregeln. Die meisten dieser Rechenregeln entsprechen denen für das Rechnen mit Zahlen. Dies betrifft die sogenannten "punktweise Operationen": Addition und Subtraktion, Multiplikation und Division. Der Einfachheit halber betrachten wir hier nur Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. (Für Funktionen, die auf Teilmengen $U \subset \mathbb{R}$ definiert sind, gibt es entsprechende Definitionen und Rechenregeln.)

Punktweise Operationen. Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Sei $r \in \mathbb{R}$

- **Addition.** Die Funktion $f+g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ definiert. Hierzu gehört das folgende Beispiel.

  Beispiel: Trendlinie mit jahreszeitlicher Schwankung.



Hier handelt es sich offensichtlich um die Addition einer linearen Funktion und einer Sinus-Funktion.

- **Skalar-Multiplikation.** Die Funktion $(rf)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch $(rf)(x) = rf(x)$ definiert.

  Mit Hilfe von Addition und Skalar-Multiplikation definiert man die **Subtraktion** von Funktionen: $f - g = f + (-1)g$.

- **Multiplikation.** Die Funktion $fg\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch $(fg)(x) = f(x)\cdot g(x)$ definiert. Hierzu gehört das Beispiel einer gedämpften Schwingung, siehe unten.

- **Division.** Wir wollen $\frac{1}{f}$ definieren. Hier haben wir das Problem, dass diese Funktion nur auf der Mnge $U = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ definiert ist, es ist $\frac{1}{f}\colon U \to \mathbb{R}$ durch $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$ definiert.

Für diese Operationen gelten wie beim Rechnen mit Zahlen die Assoziativgesetze, Kommutativgesetze und das Distributivgesetz.

Neben diesen Operationen gibt es aber auch noch die **Hintereinanderschaltung** und das **Invertieren.**

- **Hintereinanderschaltung:** Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Man definiert $f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Man verwechsle nie die Hintereinanderschaltung mit der punktweisen Multiplikation. Dies sind ganz verschiedene Operationen!

Man beachte: Im allgemeinen ist $f \circ g \neq g \circ f$, wie das Beispiel $f(x) = x + 1$ und $g(x) = x^2$ zeigt. Es ist $(f \circ g)(x) = x^2 + 1$, aber $(g \circ f)(x) = (x + 1)^2$.

Dies ist wohl die erste Bekanntschaft mit einer nicht-kommutativen Operation. Derartige nicht-kommutative Operationen spielen eine wesentliche Rolle in der neueren Mathematik!

- **Inverse Funktion.** Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv, so ist $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert, und zwar ist $f^{-1}(x) = y$ genau dann, wenn $f(y) = x$ gilt.

Beispiel: Gedämpfte Schwingungen.

Die Funktionen der Form $f(t) = a\cos(\lambda t) + b\sin(\lambda t)$ (mit Konstanten a, b, λ) erfüllen die Differentialgleichung

$$f''(t) = -cf(t) \qquad \text{mit} \qquad c = \lambda^2.$$

Ein typisches Beispiel für das Auftreten dieser Differentialgleichung sind (ungedämpfte) Schwingungen: Gegeben sei eine Masse m, die an einer elastisches Feder aufgehängt ist. Bezeichnen wir mit $f(t)$ die Auslenkung der Masse zum Zeitpunkt t aus der Ruhelage, so ist die Rückholkraft K der Feder proportional zu $f(t)$, mit einem negativen Proportionalitätsfaktor (das Minuszeichen gibt an, daß die Kraft in die zur Auslenkung entgegengesetzte Richung weist); wegen des Newton'schen Gesetzes *Kraft* = *Masse* × *Beschleunigung* ist die Beschleunigung $f''(t)$ proportional zu K. Also erhalten wir eine Gleichung der Form $f''(t) = -cf(t)$ mit $c > 0$.

Berücksichtigen wir jetzt zusätzlich noch die Reibung, so erhalten wir eine weitere Kraft: diese Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit und weist in die zur Geschwindigkeit entgegengesetzte Richtung. Also haben wir jetzt zwei Kräfte, die Rückholkraft K_1, die proportional zu $-f(t)$ ist, und die Reibungskraft K_2, die proportional zu $-f'(t)$ ist, insgesamt erhalten wir also eine Differentialgleichung der Form

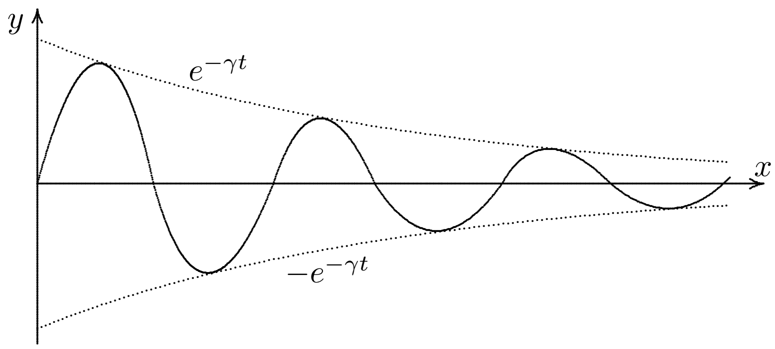
$$(**) \qquad f''(t) = -cf(t) - rf'(t) \qquad \text{mit} \qquad c, r > 0.$$

Es gibt zwei wesentlich verschiedene Verhaltensweisen:

(1) Das Schwingen: Ist $c > \frac{r^2}{4}$, so erhält man Lösungen wie zum Beispiel

$$f(t) = e^{-\gamma t}\sin(\lambda t) \qquad \text{mit} \qquad \gamma = \tfrac{r}{2} \qquad \text{und} \qquad \lambda = \sqrt{c - \tfrac{r^2}{4}},$$

dies ist ein Schwingung, die zwischen den Exponentialfunktionen $e^{-\gamma t}$ und $-e^{-\gamma t}$ hin und her pendelt: die Amplitude klingt exponentiell ab, die Nullstellen haben jeweils den gleichen Abstand (nämlich $\frac{\pi}{\lambda}$):



(2) Ist $c < \frac{r^2}{4}$, so besitzt die quadratische Gleichung $\gamma^2 + r\gamma + c$ zwei Lösungen, etwa γ_1 und γ_2, und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $(**)$ lautet nun

$$f(t) = ae^{-\gamma_1 t} + be^{-\gamma_2 t} \qquad \text{mit Konstanten} \qquad a, b.$$

Beide Summanden beschreiben exponentielles Abklingen – hier kommt es gar nicht mehr zum wirklichen Schwingen, die Masse bewegt sich direkt zur Ruhelage hin.

8.6. Gerade und ungerade Funktionen.

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; sie heißt *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Sei $\mathcal{G}$ die Menge der geraden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und $\mathcal{U}$ die der ungeraden Funktionen.

(1) *Sind $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$, so ist auch $g_1 + g_2 \in \mathcal{G}$.*

(2) *Sind $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$, so ist auch $g_1 g_2 \in \mathcal{G}$.*

(1′) *Sind $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$, so ist auch $u_1 + u_2 \in \mathcal{U}$.*

(2′) *Sind $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$, so ist $u_1 u_2 \in \mathcal{G}$.*

(2″) *Ist $g \in \mathcal{G}$, und $u \in \mathcal{U}$, so ist $gu \in \mathcal{U}$.*

Die Aussagen (1), (2), (1′), (2′), (2″) sollte man mühelos beweisen können.

(3) $\mathcal{G} \cap \mathcal{U} = \{0\}$.

Beweis: Natürlich ist die Nullfunktion sowohl gerade als auch ungerade. Sei umgekehrt $f \in \mathcal{G} \cap \mathcal{U}$. Sei $x \in \mathbb{R}$. Einerseits ist $f(-x) = f(x)$, weil f gerade ist, andererseits ist $f(-x) = -f(x)$, weil f ungerade ist. Aus $f(x) = -f(x)$ folgt aber $f(x) = 0$. Wir sehen, dass f die Nullfunktion ist.

(4) *Ist f beliebig, so ist g mit $g(x) = f(x) + f(-x)$ in $\mathcal{G}$.*

Beweis: Es ist

$$g(-x) = f(-x) + f(-(-x)) = f(-x) + f(x) = f(x) + f(-x) = g(x).$$

(4′) *Ist f beliebig, so ist u mit $u(x) = f(x) - f(-x)$ in $\mathcal{U}$.*

Beweis: analog.

Satz: *Jede Funktion f lässt sich als Summe einer geraden Funktion g und einer ungeraden Funktion u schreiben, und diese Darstellung ist eindeutig.*

Beweis: Sei $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ und $u(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$. In (4) wurde gezeigt, dass $2g(x)$ gerade ist, damit ist auch $g(x)$ gerade. In (4′) wurde gezeigt, dass $2u(x)$ ungerade ist, damit ist auch $u(x)$ ungerade. Und natürlich ist

$$g(x) + u(x) = \tfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \tfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = f(x).$$

Eindeutigkeit: Sind g, g' gerade Funktionen und u, u' ungerade Funktionen mit

$$f = g + u = g' + u',$$

so ist

$$g - g' = u' - u.$$

Nun ist $g - g'$ gerade, $u' - u$ ungerade. Wegen (3) sehen wir: $g = g',\ u = u'$.