

11. Folgen und Reihen.

11.1. Folgen.

Eine *Folge* reeller Zahlen ist eine Abbildung $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Statt $a(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ schreibt man meist a_n ; es handelt sich also bei einer Folge um die Angabe der Zahlen $a_1, a_2, a_3, \dots$. Die Folge selbst notiert man meist in der Form $(a_n)_n = (a_1, a_2, a_3, \dots)$.

Entsprechend ist eine Folge komplexer Zahlen eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, und man schreibt auch hier $(a_n)_n = (a_1, a_2, a_3, \dots)$

Beispiele von Folgen:

- $a_n = 3$ für alle n , also $(a_n)_n = (3, 3, 3, \dots)$. Man nennt dies eine *konstante* Folge.
- $a_n = \frac{1}{n}$, also $(a_n)_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$.
- $a_n = \frac{1}{q^n}$ für eine feste reelle Zahl q , also $(a_n)_n = (\frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q^3}, \dots)$. Man nennt dies eine *geometrische* Folge.
- $a_n = \sum_{t=1}^n \frac{1}{t}$, also $(a_n)_n = (1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots)$.

Für die Analysis ist vor allem die Frage nach der Konvergenz von Folgen von Bedeutung. Allerdings spielen in der Mathematik auch nicht-konvergente Rolle eine große Rolle!

11.2. Konvergenz von Folgen

Beim Arbeiten mit Folgen ist es üblich, die folgende Sprechweise zu verwenden: man sagt: *fast alle* Elemente der Folge haben eine gewisse Eigenschaft, statt: *alle Elemente bis auf (höchstens) endlich viele* haben diese Eigenschaft.

Definition: Eine Folge $(a_n)_n$ *konvergiert gegen* a wenn für jedes $\epsilon > 0$ gilt: Fast alle Folgenglieder a_n erfüllen die Bedingung

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

(Das heißt also: Zu $\epsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl N mit $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N$.) Man schreibt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder einfach $\lim a_n = a$, **falls die Folge $(a_n)_n$ gegen a konvergiert**. Man nennt a den *Grenzwert* oder den *Limes* der Folge $(a_n)_n$.

Für eine Folge reeller Zahlen heißt dies: Fast alle Folgenglieder liegen im Intervall $]a - \epsilon, a + \epsilon[$.

Für eine Folge komplexer Zahlen heißt dies: Fast alle Folgenglieder liegen im Kreis um a mit Radius ϵ .

Statt mit beliebigen reellen Zahlen $\epsilon > 0$ zu arbeiten, ist es ausreichend, Zahlen der Form $\frac{1}{m}$ mit $m \in \mathbb{N}$ zu verwenden. Man kann die Definition der Konvergenz einer Folge auch

so formulieren: Für jede natürliche Zahl m müssen fast alle Folgenglieder a_t die Bedingung $|a_t - a| < \frac{1}{m}$ erfüllen.

Vererbungseigenschaften für Konvergenz: Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente Folgen, sei $\lim a_n = a$ und $\lim b_n = b$. Dann gilt:

Die **Summe** $(a_n + b_n)_n$ ist eine konvergente Folge und es gilt $\lim(a_n + b_n) = a + b$.

Die **Differenz** $(a_n - b_n)_n$ ist eine konvergente Folge und es gilt $\lim(a_n - b_n) = a - b$.

Das **Produkt** $(a_n b_n)_n$ ist eine konvergente Folge und es gilt $\lim(a_n b_n) = ab$.

Quotient: Ist $b_n \neq 0$ für alle n , so ist auch die Folge $(a_n/b_n)_n$ eine konvergente Folge und es gilt $\lim(a_n/b_n) = a/b$.

Satz 1. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Warnung: Die Umkehrung gilt nicht!

Beweis von Satz 1: Sei $\lim a_n = a$. Zu $\epsilon = 1$ gibt es ein N mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$. Sei c das Maximum der Zahlen $|a| + 1, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|$. Dann sieht man mühelos, dass $|a_n| \leq c$ für alle n gilt.

Satz 2. *Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent* (monoton meint: monoton wachsend oder monoton fallend).

Beweis von Satz 2: Sei $(a_n)_n$ eine beschränkte, monoton wachsende Folge. Wegen der Beschränktheit gibt es $r \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq r$ für alle n . Wir wählen nun r minimal mit dieser Eigenschaft. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein N mit $r - \epsilon < a_N$ (sonst wäre r nicht minimal). Weil die Folge $(a_n)_n$ monoton wachsend ist, ist $a_N \leq a_n$ für alle $n \geq N$. Es ist also für $n \geq N$

$$r - \epsilon < a_N \leq a_n \leq r < r + \epsilon,$$

fast alle Elemente a_n liegen also im Intervall $]r - \epsilon, r + \epsilon[$. Entsprechend argumentiert man, falls die Folge monoton fallend ist.

Definition: Ist $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ eine Folge natürlicher Zahlen, und ist $(a_n)_n$ eine beliebige Folge (reeller oder komplexer) Zahlen, so nennt man

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$$

eine *Teilfolge* der Folge $(a_n)_n$.

Satz 3. *Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent.*

Der Beweis von Satz 3 ist einfach.

Satz 4 (Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis von Satz 4: [fehlt].

Satz 5 (Cauchy). *Genau dann ist eine Folge $(a_n)_n$ beschränkt, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$.*

Beweis von Satz 5: [fehlt].

Ist die Folge $(a_n)_n$ nicht konvergent, so nennt man dies eine *divergente* Folge.

11.3. Nullfolgen.

Eine *Nullfolge* ist eine Folge, die gegen Null konvergiert. Es handelt sich dabei also um spezielle konvergente Folgen. Um das Konvergenzverhalten von Folgen zu verstehen, reicht es, sich mit Nullfolgen zu beschäftigen, denn es gilt:

Satz 1. *Eine Folge $(a_n)_n$ ist genau dann konvergent mit Limes a , wenn die Folge $(a_n - a)_n$ eine Nullfolge ist.*

Der Beweis ist einfach.

Besonders einfach zu beschreiben sind monoton fallende Nullfolgen: Ist $(a_n)_n$ eine monoton fallende Nullfolge, so müssen natürlich alle a_n nicht-negative Zahlen sein. *Ist eine Folge $(a_n)_n$ nicht-negativer reeller Zahlen gegeben, so ist dies genau dann eine Nullfolge, wenn es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_N < \frac{1}{m}$ (denn wegen der Monotonie ist dann $0 \leq a_t \leq a_N < \frac{1}{m}$ für alle $t \geq N$).*

Satz 2. *Ist $|q| < 1$, so ist $(q^n)_n$ eine Nullfolge.*

Beweis. Es genügt, reelle Zahlen q mit $0 < q < 1$ zu betrachten. Statt zu zeigen, dass

$$1, q, q^2, q^3, \dots$$

für $0 < q < 1$ eine Nullfolge ist, kann man auch zeigen:

Ist $1 < r \in \mathbb{R}$, so gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $n < r^N$ (das heißt, die Glieder der Folge

$$1, r, r^2, r^3, \dots$$

werden beliebig groß): man betrachte den Kehrwert $r = \frac{1}{q}$.

Der Beweis erfolgt in zwei Schritten. Die Bernoulli-Ungleichung für $x = r - 1$ besagt:

$$r^N = (1 + (r - 1))^N \geq 1 + N(r - 1)$$

(hier brauchen wir nur $r \geq 0$). Als zweiten Schritt verwenden wir die **Archimedes-Eigenschaft** der reellen Zahlen: Sind $s, n \in \mathbb{R}^+$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$Ns > n.$$

Insgesamt sieht man also: Zu $s = r - 1$ und n gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $N(r - 1) > n$, also

$$r^N \geq 1 + N(r - 1) > n.$$

Hier ein Beweis der Bernoulli-Ungleichung:

Bernoulli-Ungleichung. Für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Beweis: $n = 1$. Klar. Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1+x+nx+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x. \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung verwendet die Induktionsverankerung und $1+x \geq 0$, die zweite die Tatsache, dass Quadratzahlen nicht negativ sind.

Wir haben gezeigt: Ist $|q| < 1$, und $\epsilon > 0$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|q|^N < \epsilon$. Wie findet man N explizit?

Wir können $q \neq 0$ voraussetzen. Zu $\epsilon > 0$ suchen wir also N mit $|q|^N < \epsilon$, also

$$N \ln |q| < \ln \epsilon$$

Nun ist $0 < |q| < 1$, also $\ln |q| < 0$, also muss man ein

$$N > \frac{\ln \epsilon}{\ln |q|}$$

wählen.

11.4. Die Fibonacci-Folge.

Definition. Sei $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, und für $n \geq 1$ sei

$$a_{n+1} = a_{n-1} + a_n.$$

Dies liefert die *Fibonacci-Folge*

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

sie ist nach LEONARDO VON PISA, der auch FIBONACCI genannt wurde, benannt, er lebte 1170-1240 und gilt als der bedeutendste Mathematiker des Mittelalters. Er hat sie in seinem Buch LIBER ABBACI behandelt, und zwar zur Modellierung des Wachstums einer Kaninchenpopulation: a_n bezeichne die Anzahl der Kaninchenpaare im Monat n , dabei gelte:

- Zu Beginn ($n = 1$) gibt es genau ein Paar geschlechtsreifer Kaninchen.

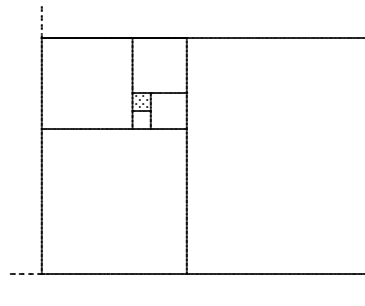
- Jedes geschlechtsreife Paar wirft pro Monat ein weiteres Paar.
- Jedes neugeborene Paar wird im zweiten Lebensmonat geschlechtsreif.

Meist wird das Entwicklungsgesetz für die Fibonacci-Zahlen mit Hilfe der 2×2 -Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ formuliert, denn es gilt

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Satz. Es ist $\sum_{i=1}^n a_i^2 = a_n a_{n+1}$.

Dies kann man sich sehr schön anhand einer Spirale, die durch die Quadrate mit Kantenlänge a_i gebildet wird, verdeutlichen!



Dabei beginnt man mit dem punktierten Quadrat mit Kantenlänge $a_1 = 1$, fügt (darunter) ein Quadrat mit Kantenlänge $a_2 = 1$ an, dann (rechts) ein Quadrat mit Kantenlänge $a_3 = 2$, dann (darüber) ein Quadrat mit Kantenlänge $a_4 = 3$, usw.

Beweis mit Induktion. Hier der Induktionsschritt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + a_{n+1}^2 = a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2 = a_{n+1}(a_n + a_{n+1}) = a_{n+1} a_{n+2}.$$

Sei

$$\tau_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad \text{und} \quad \tau_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

Diese beiden Zahlen sind äußerst interessant, man nennt τ_1 *goldene Zahl* oder auch die Zahl zum *goldenen Schnitt*, denn es gilt: Sind a, b positive Zahlen mit $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$, so ist $\frac{a}{b} = \tau_1$.
Es ist

$$\tau_1 \approx 1,61803..., \quad \text{und} \quad \tau_2 \approx -0,61803...,$$

Offensichtlich gilt:

$$\tau_1 + \tau_2 = 1, \quad \tau_1 - \tau_2 = \sqrt{5}, \quad \tau_1 \cdot \tau_2 = -1,$$

demnach sind τ_1, τ_2 die beiden Nullstellen des quadratischen Polynoms

$$x^2 - x - 1.$$

Satz (Formel von Binet). Für $n \geq 0$ gilt

$$a_n = \frac{\tau_1^n - \tau_2^n}{\sqrt{5}}.$$

Beweis mit vollständiger Induktion: Für $n = 0$ ist $a_n = 0 = \frac{1-1}{\sqrt{5}}$.
Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + a_{n-1} \\ &= \frac{\tau_1^n - \tau_2^n}{\sqrt{5}} + \frac{\tau_1^{n-1} - \tau_2^{n-1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau_1^n + \tau_1^{n-1} - \tau_2^n - \tau_2^{n-1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\tau_1^n \left(1 + \frac{1}{\tau_1}\right) - \tau_2^n \left(1 + \frac{1}{\tau_2}\right) \right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau_1^n (1 - \tau_2) - \tau_2^n (1 - \tau_1)), \end{aligned}$$

dabei haben wir zweimal $\tau_1 \tau_2 = -1$ verwendet. Nun wissen wir aber, dass auch $\tau_1 + \tau_2 = 1$ gibt, also ist $1 - \tau_2 = \tau_1$, und $1 - \tau_1 = \tau_2$. Insgesamt sehen wir:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau_1^n (1 - \tau_2) - \tau_2^n (1 - \tau_1)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau_1^{n+1} - \tau_2^{n+1}). \end{aligned}$$

Folgerung. Es ist $\lim a_{n+1}/a_n = \tau_1$.

Beweis: [fehlt].

11.5. Reihen.

Sei $(a_n)_n$ eine Folge. Durch $s_n = \sum_{t=1}^n a_t$ kann man eine neue Folge konstruieren, man nennt dies die *Folge der Partialsummen*. Wenn die Folge der Partialsummen konvergiert, etwa gegen die Zahl s , so schreibt man

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_n = s$$

und nennt dies eine (konvergente) *Reihe*.

Warnung: Für uns ist eine konvergente Reihe immer der **Grenzwert** der Folge der Partialsummen, und damit eine **Zahl**. Man muss sehr klar zwischen Zahlen und Folgen unterscheiden. In manchen Büchern versteht man unter einer “Reihe” die Folge der Partialsummen, oder auch beides: die Folge der Partialsummen, wie auch den Grenzwert dieser Folge, falls er existiert. Das bringt aber Schwierigkeiten mit sich: Denn eine Folge ist keine Zahl — man will aber mit dem Symbol $\sum_{t=1}^{\infty} a_n$ rechnen! Für uns ist eine nicht-konvergente Reihe nur eine Ansammlung von Kreide oder Tinte, aber kein mathematisches Objekt.

Cauchy-Kriterium, für Reihen. Sei $(a_n)_n$ eine Folge. Genau dann konvergiert die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{t=1}^n a_t$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, sodass für alle n, m mit $N \leq n \leq m$ gilt:

$$\left| \sum_{t=n+1}^m a_t \right| < \epsilon.$$

Dies ist nur die Umformulierung des Cauchy-Kriteriums für Folgen, denn

$$s_m - s_n = \sum_{t=n+1}^m a_t.$$

Insbesondere sehen wir:

Folgerung. Ist $\sum_{t=1}^{\infty} a_n$ eine (konvergente) Reihe, so ist $(a_n)_n$ eine Nullfolge.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Nach dem Cauchy-Kriterium gibt es ein N mit $|\sum_{t=n+1}^m a_t| < \epsilon$ für alle $N \leq n \leq m$. Insbesondere gilt dies für $N \leq n$ und $m = n + 1$.

Warnung. Wir werden gleich sehen, dass die Umkehrung **nicht** gilt!

Satz. Für die Folge $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ gilt: Die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{t=1}^n \frac{1}{t}$$

konvergiert nicht. Man nennt $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t}$ die *harmonische Reihe* (obwohl dies nach unserer Definition gar keine “Reihe” ist), und sagt: *die harmonische Reihe ist divergent*.

Beweis: Wir betrachten die Partialsummen s_{2^n} , zum Beispiel für $n = 4$:

$$\begin{aligned} s_{2^4} = s_{16} &= \sum_{t=1}^{16} \frac{1}{t} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{4}{2}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir für $t \leq 2^m$ die offensichtliche Abschätzung $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{2^m}$ verwendet. Ganz allgemein sieht man auf diese Weise:

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2},$$

die Folge dieser Partialsummen geht also gegen unendlich!.

Satz. Sei $(a_t)_t$ eine monoton fallende, reelle Nullfolge. Dann konvergiert die Reihe

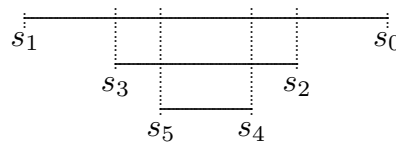
$$\sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t a_t,$$

man nennt dies eine *alternierende* Reihe.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} = s_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \geq s_{2n} \\ s_{2n+1} &= s_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} = s_{2n-1} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq s_{2n-1} \\ s_{2n+2} &= s_{2n+1} + a_{2n+2} \geq s_{2n+1} \end{aligned}$$

Also haben wir folgende Intervall-Schachtelung:



Diese Intervallschachtelung definiert eine reelle Zahl r und natürlich ist r der Limes der Folge $(s_n)_n$.

Umgekehrt sieht man auch: Jede Intervallschachtelung erhält man auf diese Weise.

Beispiele:

(1) Die **Leibniz-Reihe**.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

Die Konvergenz ist eine direkte Folge des Satzes. Warum allerdings die Reihe gleich $\frac{\pi}{4}$ ist, wird hier nicht bewiesen.

(2) Die **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln(2)$$

Die Konvergenz ist wieder eine direkte Folge des Satzes.

Definition: Eine Reihe $\sum_{t=1}^{\infty} a_t$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum_{t=1}^{\infty} |a_t|$ konvergent ist.

Satz. Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus dem Cauchy-Kriterium für Reihen und der Dreiecksungleichung.

Beispiel. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ ist konvergent, dagegen ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent. Also ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ **nicht** absolut konvergent. Dagegen sind die konvergenten geometrischen Reihen, die im nächsten Abschnitt betrachtet werden, absolut konvergent.

11.6. Geometrische Reihen.

Es gilt die folgende **Summenformel**

$$\sum_{t=0}^n q^t = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q},$$

hier ist $q \neq 1$ eine beliebige reelle (oder komplexe) Zahl.

Sei nun $|q| < 1$. Ist $\epsilon > 0$ vorgegeben, so betrachten wir $\epsilon' = |1 - q|\epsilon$. Es gibt ein n mit $|q|^n < \epsilon' = |1 - q|\epsilon$. Also gilt für alle $m \geq n$

$$\left| \frac{q^m}{1 - q} \right| \leq \left| \frac{q^n}{1 - q} \right| < \epsilon.$$

Wir sehen also: die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{t=0}^n q^t$ konvergiert gegen $\frac{1}{1 - q}$. Demnach gilt der folgende Satz:

Satz. Ist $|q| < 1$, so ist

$$\sum_{t=0}^{\infty} q^t = \frac{1}{1 - q}$$

Man nennt $\sum_{t=0}^{\infty} q^t$ eine *geometrische Reihe*.

Insbesondere sieht man für $q = \frac{1}{m}$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^t = \frac{m}{m - 1}$$

Die geometrische Reihe spielt eine ganz wichtige Rolle in vielen mathematischen Anwendungen!