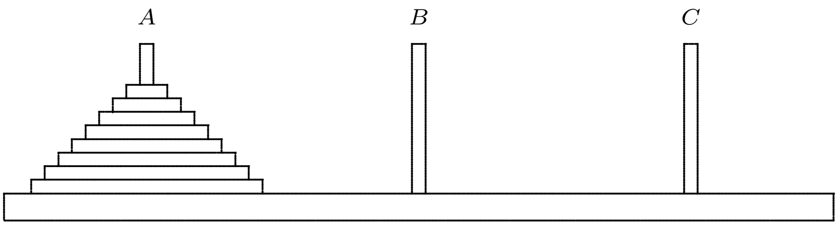
Der Turm von Hanoi.

Gegeben sind n runde, gelochte Holzscheiben (etwa $n = 8$ oder $n = 9$), alle verschieden groß. Es gibt drei senkrechte Stäbe A, B, C. Zu Beginn bilden die Scheiben einen Stapel um den Stab A, und zwar der Größe nach geordnet (die kleinste Scheibe liegt oben). Ziel des Spiels ist es, den Stapel von A nach C zu versetzen. Bei jedem Zug darf die oberste Scheibe eines beliebigen Stapels auf einen der beiden anderen Stäbe gelegt werden, dabei darf nie eine größere Scheibe auf einer kleineren liegen. Ausgangsposition:



Zu diesem Puzzle, als dessen Erfinder der Franzose Edouard Lucas (1883) gilt, gehört eine Geschichte, die im alten Indien spielt. Im Buch *Puzzles Old And New* von A.L.Hoffmann, das 1893 in London erschienen ist, wird sie folgendermaßen wiedergegeben: *At the beginning of the world, Brahma set up in the great temple of Benares three diamond pyramids. Round the first of them he hung sixty-four rings, made of purest gold, and arranged in regular order, the largest ring encircling the foot of the pyramid and the smallest its top. And Brahma said unto the priests, „Transfer these sixty-four rings from the first pyramid to the third, transposing one ring at a time only, and putting it either on a vacant pyramid or on a lager ring. By the time you have executed this task the end of the world will be near.“*

Wir werden uns weiter unten klarmachen, daß die Anzahl der notwendigen Züge für $n = 64$ die Zahl

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

ist (die man von den Reiskörnern auf dem Schachbrett her kennt). Geht man davon aus, daß man für jede Bewegung (für jeden Zug) eine Sekunde braucht, so braucht man für $2^8 = 256$ Züge mehr als 4 Minuten; für $2^{10} \approx 1000$ Züge braucht man 17 Minuten. Ein Jahr hat $60 \times 60 \times 24 \times 365,25 (= 31\,557\,600)$ Sekunden, wegen

$$\frac{2^{64} - 1}{60 \times 60 \times 24 \times 365,25} \approx 5,8 \times 10^{11}$$

sehen wir, daß ungefähr 600 000 000 000 Jahre (also 600 Milliarden Jahre) verstrichen sein werden, bis alle Ringe neu geordnet sind.[1]

[1] Hier drei Anmerkungen: Erstens, um mit großen Zahlen etwas anfangen zu können, braucht man natürlich Vergleichszahlen. Hier wenigstens zwei: Für die Geologen begann vor 4 Milliarden Jahren das sogenannte Archaikum, die Schalenstruktur der Erde bildete sich, die Erdkruste verfestigte sich langsam, . . . ; die Urknalltheorie geht davon aus, daß der Urknall

Lösung. Wir behaupten, daß man bei n Scheiben mit $2^n - 1$ Zügen die Aufgabe lösen kann, nicht aber mit weniger Zügen. Wie beweist man dies? Zum Beispiel mit vollständiger Induktion: Nehmen wir an, daß wir für ein festes n schon eine Strategie kennen, die mit $2^n - 1$ Zügen auskommt. Wenn nun $n+1$ Scheiben gegeben sind, so bewegen wir mit $2^n - 1$ Zügen die obersten n Scheiben von A nach B, ohne die unterste Scheibe zu beachten. Nun kommt der 2^n-te Zug: die unterste Scheibe wird von A nach C geschoben. Mit wiederum $2^n - 1$ Zügen kann man schließlich auch die übrigen n Scheiben von B nach C schaffen, wiederum ohne die Lage der größten Scheiben zu verändern. Insgesamt sind dies

$$(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$$

Züge. Die Optimalität sieht man analog: Wir nehmen an, daß wir eine Zugfolge kennen, die das $(n+1)$-Scheiben-Puzzle löst. Irgendwann einmal muß die größte Scheibe bewegt worden sein, sagen wir dies geschah zum ersten Mal beim Zug mit der Nummer t; dabei wurde sie von A zu einem der beiden anderen Stäbe, sagen wir zum Stab B gebracht. Zu diesem Zeitpunkt müssen sich alle anderen Scheiben (wohlgeordnet) auf dem Stab C befinden, sonst hätten wir ja die größte Scheibe nicht bewegen können. Das heißt aber, daß die ersten $t-1$ Züge eine Lösung des n-Scheiben-Puzzles liefern. Nach Induktion gilt demnach $t - 1 \geq 2^n - 1$. Entsprechend sehen wir, daß nach dem letzten Bewegen der größten Scheibe noch mindestens $2^n - 1$ Züge notwendig sind; insgesamt brauchen wir also auf jeden Fall mindestens $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1)$ Züge.

Die optimale Strategie. Wir haben gesehen[2], daß die Zugzahl $2^n - 1$ für das n-Scheiben-Puzzle optimal ist. Der Beweis zeigt sogar, daß es überhaupt nur eine optimale

---

vor etwa 20 Milliarden Jahren stattfand.

Zweitens sollte man sich immer fragen, wie stark willkürliche Annahmen unsere Berechnungen beeinflussen: wir sind davon ausgegangen, daß man für einen Zug eine Sekunde braucht; nehmen wir nun an, daß man 10 Züge pro Sekunde schafft (mehr geht ja wirklich nicht!), so ist das Ergebnis durch 10 zu teilen: immer noch werden 60 Milliarden Jahre vergehen.

Drittens eine Warnung: Im Buch *Denkspiele der Welt* von Pieter van Delft und Jack Botermans wird behauptet, daß

$$400\,000\,000\,000\,000\,000\,000$$

Jahrhunderte vergehen, also 40 Trilliarden Jahre (p.175); das ist denn doch zu viel. Wie immer muß man vorsichtig sein, wenn man Zahlen einfach übernehmen will!

[2] Wir hätten den Gedankengang auch so formulieren können, daß wir es mit einer rekursiv definierten Funktion f zu tun haben, die wir leicht bestimmen können: bezeichnen wir mit $f(n)$ die optimale Anzahl der Züge beim n-Scheiben-Puzzle, so gilt

$$f(0)=0 \quad \text{und} \quad f(n+1)=2\cdot f(n)+1 \quad \text{für alle} \quad n\geq 0.$$

Die einzige derartige Funktion f ist aber $f(n)=2^n-1$. Denn einerseits erfüllt 2^n-1 die beiden genannten Bedingungen, andererseits sieht man mit Induktion unmittelbar, daß es nur eine auf $\mathbb{N}$ definierte Funktion f, die diesen beiden Bedingungen genügt, geben kann.

Lösung gibt: mit der optimalen Strategie für das $(n-1)$-Scheiben-Puzzle versetzt man die obersten $n-1$ Scheiben von a nach b, dann bringt man die größte Scheibe von A nach C, schließlich verwendet man noch einmal die optimale Lösung für das $(n-1)$-Scheiben-Puzzle, um die übrigen Scheiben von B nach C zu bringen. Was sehen wir? Die größte Scheibe wurde nur einmal bewegt, alle anderen wurden doppelt so oft wie bei der optimalen Lösung des $(n-1)$-Scheiben-Puzzles bewegt; also wurde die zweit-größte Scheibe zweimal bewegt, die drittgrößte viermal, und so weiter: auch hier Zweierpotenzen. Die Gesamtzahl $2^n - 1$ an notwendigen Zügen ist die Summe der Anzahl der Züge für die einzelnen Scheiben; wir haben also wieder die Summenbildung

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

vor Augen.