

Übungsaufgaben 1.

Sei K ein Körper.

1. Im FISCHER, p.216 steht folgende Warnung: Sei A eine $(n \times n)$ -Matrix mit Koeffizienten in K . Selbst wenn A eine Diagonalmatrix ist, *so braucht nicht jeder Vektor ungleich Null ein Eigenvektor zu sein*. Dies sollte völlig klar sein! Zeigen Sie dazu, dass für jede $(n \times n)$ -Matrix A gilt:

(a) Sind v_1, v_2 Eigenvektoren zu A mit Eigenwerten λ_1 , beziehungsweise λ_2 , und ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so ist $v_1 + v_2$ von Null verschieden und **kein** Eigenvektor.

(b) Man folgere aus (a), dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) Jeder von Null verschiedene Vektor des K^n ist Eigenvektor für A .
- (ii) Die Matrix A ist eine Skalarmatrix.

2. Sei $n \geq 1$. Sei $A = (a_{ij})$ eine $(n \times n)$ -Matrix mit $a_{ij} = 0$ für alle $i \geq j$.

Zeige: Genau dann ist $\text{Eig}(A; 0)$ eindimensional, wenn $a_{i, i+1} \neq 0$ für alle $1 \leq i < n$ gilt.

3. (a) Zeige: Seien $A, B \in M(n \times n, K)$ nilpotente Matrizen. Ist $AB = BA$, so ist $A + B$ nilpotent.

(b) Zeige, dass die Umkehrung nicht gilt: $A + B$ kann nilpotent sein, auch wenn $AB \neq BA$ gilt. Und man gebe für jedes $n \geq 2$ nilpotente Matrizen $A, B \in M(n \times n, K)$ an, sodass $A + B$ nicht nilpotent ist.

4. Sei $A \in M(n \times n, K)$ eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonalkoeffizienten. Sei $B \in M(n \times n, K)$. Zeige: Genau dann ist $AB = BA$, wenn auch B eine Diagonalmatrix ist.

Hier noch einige Bezeichnungen:

Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij})$ heißt Diagonalmatrix, falls $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$ gilt. Die Koeffizienten a_{ii} heißen die Diagonalkoeffizienten.

Die Matrizen der Form λE_n mit $\lambda \in K$ heißen Skalarmatrizen (dies sind also gerade diejenigen Diagonalmatrizen, deren Diagonalkoeffizienten einen konstanten Wert haben).

Eine quadratische Matrix A heißt nilpotent, wenn es eine natürliche Zahl s mit $A^s = 0$ gibt.

Präsenz-Aufgaben.

1. Man bestimme alle Eigenräume für die Matrix $A \in M(4 \times 4, \mathbb{F}_2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Sei $n \geq 1$. Sei $A = (a_{ij})$ eine $(n \times n)$ -Matrix mit $a_{ij} = 0$ für alle $i \geq j$.

(a) Zeige: $A^n = 0$.

(b) Man gebe eine Formel für A^{n-1} an.

3. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$ heißt Diagonalmatrix, falls $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$ gilt.

(a) Zeige: Sei $A = (a_{ij})$ eine Diagonalmatrix. Genau dann ist λ ein Eigenwert für A , wenn $\lambda = a_{ii}$ für ein i gilt.

(b) Bestimme die Eigenräume für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$$

(c) Wie berechnet man für eine Diagonalmatrix A die Eigenräume $\text{Eig}(A; \lambda)$?

4. Man zeige: Sei $A = (a_{ij})$ eine (2×2) -Matrix. Zeige: Genau dann gilt $A^2 = 0$, wenn sowohl $\det A = 0$ als auch $a_{11} + a_{22} = 0$ gilt.

Übungsaufgaben 2.

1. Sei $\mathbb{R}[T]$ der Vektorraum der Polynome (in der Variablen T) mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$. Sei $L: \mathbb{R}[T] \rightarrow \mathbb{R}[T]$ die Abbildung $f \mapsto L(f) = T \cdot f'$ (dabei ist f' die Ableitung von f). Zeige, dass L ein Endomorphismus ist und dass die Polynome T^n mit $n \in \mathbb{N}_0$ Eigenvektoren sind. Folgere daraus, dass jeder Eigenvektor für L ein skalares Vielfaches eines Monoms T^n ist.

Sei nun K ein beliebiger Körper.

2. Die Matrix

$$J_n = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \in M(n \times n, K)$$

wird durch die Gleichungen $a_{i,i+1} = 1$ für $1 \leq i < n$ und $a_{ij} = 0$ für alle i, j mit $j \neq i+1$, beschrieben.

(a) Beschreibe durch Gleichungen die Menge $\mathcal{M} \subseteq M(n \times n, K)$ aller Matrizen B , die sich als Linearkombination von Potenzen $(J_n)^t$ (mit $t \geq 0$) schreiben lassen.

(b) Zeige: $\mathcal{M}$ ist die Menge der Matrizen $B \in M(n \times n, K)$ mit $J_n B = B J_n$.

3. Sei $A \in M(n \times n, K)$. (a) In der Vorlesung LA1 wurde gezeigt, dass $M(n \times n, K)$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist. Folgere daraus, dass es ein normiertes Polynom $p(T)$ mit Koeffizienten in K gibt, sodass $p(A)$ die Nullmatrix ist. Was weiss man (auf diese Weise) über den Grad von $p(T)$?

(b) Zeige: Ist $p(T)$ ein normiertes Polynom mit $p(A) = 0$ und ist der konstante Koeffizient von $p(T)$ von Null verschieden, so ist A invertierbar und A^{-1} lässt sich als Linearkombination von Potenzen von A schreiben.

4. Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$. Man nennt die Summe der Diagonalkoeffizienten von A die *Spur* von A , also $\text{spur}(A) = \sum_i a_{ii}$. Zeige:

(a) Sind $A, B \in M(n \times n, K)$, so ist $\text{spur}(AB) = \text{spur}(BA)$.

(b) Sind $A, P \in M(n \times n, K)$, und ist P invertierbar, so gilt $\text{spur}(P^{-1}AP) = \text{spur}(A)$. Ist $P^{-1}AP$ Diagonalmatrix mit Diagonal-Koeffizienten $d_1, \dots, d_n$, so ist

$$\text{spur}(A^t) = \sum_{i=1}^n d_i^t$$

für alle natürlichen Zahlen t .

Präsenz-Aufgaben.

1. Sei

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in M(2 \times 2, K)$$

mit $a \neq c$.

Gesucht ist eine invertierbare Matrix $P(2 \times 2, K)$, sodass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.

2. Sei $V = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Betrachte die Abbildung $L: V \rightarrow V$, die durch $L(f)(r) = f(-r)$ für $r \in \mathbb{R}$ und $f \in V$ definiert ist. Zeige, dass L ein Endomorphismus ist und dass gilt: $V = \text{Eig}(L; 1) \oplus \text{Eig}(L; -1)$. (Man nennt die Funktionen in $\text{Eig}(L; 1)$ *gerade*, die in $\text{Eig}(L; -1)$ *ungerade* und sagt: Jede Funktion ist Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion und diese Summendarstellung ist eindeutig.)

3. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Zeige: Ist B eine Linear-Kombination von Potenzen A^t (mit $t \geq 0$), so gilt $AB = BA$.

Die Aufgabe 2.2 liefert ein Beispiel einer Matrix A , für die die Umkehrung gilt. Zeige: Die Umkehrung gilt nicht für alle Matrizen A .

4. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$. Ist die Matrix ähnlich zu einer Diagonalmatrix? Wenn ja, so gebe man eine derartige Diagonalmatrix an, aber auch eine invertierbare Matrix P , sodass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist, an. Ist P eindeutig bestimmt?

5. Sei A quadratische Matrix. Zeige: Genau dann ist A invertierbar, wenn 0 kein Eigenwert ist.

Übungsaufgaben 3. Diesmal nur Rechenaufgaben.

1. Bestimme mit Hilfe des Euklid'schen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler d von a, b in $R = \mathbb{Z}$ bzw. $R = \mathbb{F}_2[T]$, und schreibe d in der Form $d = ua + vb$ mit $u, v \in R$.

(a) Es sei $R = \mathbb{Z}$ und

$$a = 1\,695\,203 \quad \text{und} \quad b = 1\,703\,021.$$

(b) Es sei $R = \mathbb{F}_2[T]$ und

$$a = T^7 + T^5 + T^4 + 1 \quad \text{und} \quad b = T^5 + T^3 + T^2 + 1.$$

2. Seien $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$. Seien natürliche Zahlen $n_1, \dots, n_t$ mit $\sum n_i = n$ gegeben. Betrachte die $n \times n$ -Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{smallmatrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{smallmatrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda_t & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_t \end{smallmatrix}} \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ \\ n_t \end{matrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{smallmatrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{smallmatrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{smallmatrix}} \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ \\ n_t \end{matrix}$$

(entlang der Hauptdiagonale gibt es $(n_i \times n_i)$ -Blöcke, die jeweils obere Dreiecksmatrizen sind, und jeweils mit konstantem Hauptdiagonal-Koeffizienten λ_i ; alle übrigen Koeffizienten sind Null; bei der Matrix B wird zusätzlich verlangt, dass alle Diagonalkoeffizienten gleich sind). Berechne die Matrizen

$$\prod_{i=1}^t (A - \lambda_i E_n)^{n_i} \quad \text{und} \quad (B - \lambda E_n)^m$$

mit $m = \max_i n_i$.

3. Seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$. Bilde die $n \times n$ -Matrix

$$B = B(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & & 0 & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

(mit $n - 1$ Einsen direkt unter der Hauptdiagonale, den Koeffizienten $-a_i$ in der letzten Spalte und sonst Nullen).

(a) Berechne das charakteristische Polynom von B .

(b) Zeige: Die Abbildung $f = l_B: K^n \rightarrow K^n$ hat folgende Eigenschaft: Es gibt einen Vektor $v \in K^n$, sodass die Vektoren $v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)$ linear unabhängig sind, und sodass gilt:

$$f^n(v) = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(v).$$

4. Fibonacci-Zahlen. Man erhält die Fibonacci-Zahlen $F_0, F_1, F_2, \dots$ wie folgt: es ist $F_0 = 0, F_1 = 1$ und $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ für alle $n \geq 1$. Also gilt:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der reellen Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ und zeige, dass (und wie) A diagonalisierbar ist. Berechne auf diese Weise F_{1000} .

Präsenz-Aufgaben.

1. Bestimme mit Hilfe des Euklid'schen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler d von a, b in $R = \mathbb{Z}$ bzw. $R = \mathbb{F}_2[T]$, und schreibe d in der Form $d = ua + vb$ mit $u, v \in R$.

(a) Es sei $R = \mathbb{Z}$ und

$$a = 143 \quad \text{und} \quad b = 403$$

(b) Es sei $R = \mathbb{F}_2[T]$ und

$$a = T^3 + 1 \quad \text{und} \quad b = T^2 + 1.$$

2. Sei $v_1, \dots, v_4$ Basis eines reellen Vektorraums V . Betrachte die lineare Abbildung $f: V \rightarrow V$ mit $f(v_i) = v_{i+1}$ für $1 \leq i \leq 3$ und $f(v_4) = v_1$. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren.

3. Bestimme alle irreduziblen normierten Polynome in $\mathbb{F}_2[T]$ mit Grad 2 und 3.

Wir findet man sie? Man bestimmt alle Polynome vom Grad 2 und 3, die nicht irreduzibel sind...

3' Wie Aufgabe 3, aber man ersetze $\mathbb{F}_2$ durch $\mathbb{F}_3$.

4. Wie sehen die Koeffizienten c_i eines Produkts von normierten linearen Polynomen aus?

$$(T - \lambda_1) \cdots (T - \lambda_n) = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i T^i.$$

Offensichtlich ist $c_{n-1} = -\sum \lambda_i$ und $c_0 = (-1)^n \prod \lambda_i$. Wie erhält man $c_1, c_2, \dots, c_{n-2}$?

Bemerkungen zu einigen der Präsenz-Aufgaben 1.

1. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$. Da $\mathbb{F}_2$ nur zwei Elemente besitzt, nämlich 0 und 1, ist nur $\text{Eig}(A, 0)$ und $\text{Eig}(A, 1)$ zu berechnen. Die Matrix A hat Rang 3 und es ist $A[1, 1, 1, 1]^t = 0$, also ist $[1, 1, 1, 1]$ der einzige Eigenvektor mit Eigenwert 0 (hier wird schon wieder verwendet, dass $\mathbb{F}_2$ nur zwei Elemente besitzt). Die Matrix $A - E_4$ ist regulär, also gibt es keinen Eigenvektor mit Eigenwert 1.

Bei den Aufgaben 2 und 3 sollte das Erraten einer geeigneten Formel im Vordergrund stehen — also das Experimentieren mit Beispielen, um die Fragen 2(b) und 3(c) zu beantworten.

2(b) Setzt man $B = (b_{ij})_{ij} = A^{n-1}$, so ist $b_{1n} = a_{12}a_{23} \cdots a_{n-1,n}$ und alle anderen Koeffizienten b_{ij} sind Null.

Will man diese Formel beweisen, so sollte man auch nach Formeln für gewisse Koeffizienten der Matrizen A^t mit $1 < t < n - 1$ suchen (nämlich diejenigen mit Indexpaar $(i, i + t)$) und dann den Beweis mit Induktion führen.

Insbesondere sollte man sehen: Bei dieser Fragestellung spielen nur die Koeffizienten $a_{i,i+1}$ mit $1 \leq i \leq n - 1$ eine Rolle!

3(c) Ist $A = (a_{ij})_{ij}$ eine Diagonalmatrix mit Koeffizienten in K , und ist $\lambda \in K$, so ist

$$\text{Eig}(A; \lambda) = \langle e_i \mid a_{ii} = \lambda \rangle,$$

dabei ist $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis des K^n .

Daraus folgt (a).

(b) Im Fall der dort angegebenen Matrix A ist

$$\text{Eig}(A; 0) = \langle e_2 \rangle; \quad \text{Eig}(A; 1) = \langle e_1, e_4 \rangle; \quad \text{Eig}(A; 2) = \langle e_3 \rangle.$$

Übungsaufgaben 4. Invariante Unterräume.

Sei K ein Körper.

1. Sei V ein Vektorraum mit Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$. Sei $v = \sum_i v_i$. Sei $f: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung und jedes v_i sei ein Eigenvektor zu f mit Eigenwert λ_i . Zeige: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) Die Elemente $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind paarweise verschieden.
- (ii) Ist U ein Unterraum von V mit $v \in U$ und $f(U) \subseteq U$, so ist $U = V$.
- (iii) Die Vektoren $v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)$ bilden eine Basis von V .

2. In Aufgabe 2.2 wurde die $(n \times n)$ -Matrix J_n eingeführt (es ist $J_n = (a_{ij})_{ij}$ mit $a_{i,i+1} = 1$ für $1 \leq i < n$ und $a_{ij} = 0$ für alle i, j mit $j \neq i+1$). Bestimme alle J_n -invarianten Unterräume des K^n .

3. Sei f diagonalisierbarer Endomorphismus eines Vektorraums V (es gilt also $V = \bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(f; \lambda)$). Sei U ein f -invarianter Unterraum von V . Zeige: es gilt

$$U = \bigoplus_{\lambda \in K} (\text{Eig}(f; \lambda) \cap U).$$

Folgere daraus: U besitzt eine Basis aus Eigenvektoren für f .

4. Sei V n -dimensionaler Vektorraum, sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

(a) Zeige: Ist $f^2 = 0$, so ist $\dim \text{Bild}(f) \leq \frac{n}{2}$.

(b) Sei $t \leq \frac{n}{2}$ eine natürliche Zahl. Konstruiere einen Endomorphismus $f: K^n \rightarrow K^n$ mit $f^2 = 0$ und $\dim \text{Bild}(f) = t$.

(c) Zeige: Ist $f: V \rightarrow V$ Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums mit $\text{Kern}(f) = \text{Bild}(f)$. Zeige: Die Dimension von V ist gerade, etwa $\dim V = 2m$ und es gibt eine Basis $\{v_1, \dots, v_{2m}\}$ von V mit $f(v_{2i-1}) = v_{2i}$, für $1 \leq i \leq m$.

(d) Zeige: Ist $f^3 = 0$, so ist $\dim \text{Bild}(f^2) \leq \frac{n}{3}$.

Zusatz: Wie lautet die allgemeine Aussage zu (a) und (d)? Folgere daraus: Ist f nilpotent, so gilt $f^n = 0$.

Präsenz-Aufgaben

1. Sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums V . Zeige: Durchschnitt und Summe f -invarianter Unterräume sind f -invariant.

2. Sei f ein nilpotenter Endomorphismus eines n -dimensionalen Vektorraums V , Sei $v \in V$. Es gelte: Der einzige f -invariante Unterraum U von V mit $v \in U$ ist V selbst. Zeige: Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V , sodass für die Matrixdarstellung $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ von f gilt: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = J_n$ (dabei sei J_n die in den Aufgabe 2.2 und 4.2. betrachtete Matrix).

3. Endomorphismen der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$.

(a) Man gebe einen Endomorphismus $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ an, sodass 0 und $\mathbb{R}^2$ die einzigen f -invarianten Unterräume sind.

(b) Man gebe einen Endomorphismus $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ an, sodass 0 , $\mathbb{R}^2$ und die x -Achse $\{(r, 0) \mid r \in \mathbb{R}\}$ die einzigen f -invarianten Unterräume sind.

(c) Man gebe einen Endomorphismus $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ an, sodass 0 , $\mathbb{R}^2$, die x -Achse $\{(r, 0) \mid r \in \mathbb{R}\}$ und die y -Achse $\{(0, r) \mid r \in \mathbb{R}\}$ die einzigen f -invarianten Unterräume sind.

(d) Man gebe alle Endomorphismen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ an, sodass jeder Unterraum von $\mathbb{R}^2$ f -invariant ist.

(e) Gibt es einen Endomorphismus $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dessen Bild die x -Achse $\{(r, 0) \mid r \in \mathbb{R}\}$ ist, und für den $f^2 = 0$ gilt?

(f) Gibt es einen Endomorphismus $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dessen Bild die x -Achse $\{(r, 0) \mid r \in \mathbb{R}\}$ ist, und für den $f^2 = f$ gilt?

4. Betrachte die folgende Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$. Zeige: Die einzigen A -invarianten Unterräume U von $\mathbb{R}^4$ sind 0 , $\mathbb{R}^2 \times 0^2$ und $\mathbb{R}^4$.

(Zusatz: Wie sehen für

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

die B -invarianten Unterräume aus?)

Übungsaufgaben 5.

1. Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 2 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 3 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & 2 & 0 \\ b_4 & b_5 & b_6 & 3 \end{bmatrix},$$

mit $a_1, \dots, a_6, b_0, \dots, b_6 \in \mathbb{R}$. Für welche Werte $a_1, \dots, a_6, b_0, \dots, b_6$ sind die Matrizen A, B ähnlich?

2. (a) Gegeben seien $(n \times n)$ -Matrizen A, B . Zeige: Ist $AB = BA$, und sind alle Eigenwerte von A und B einfach, so gilt: A, B haben die gleichen Eigenvektoren.

(b) Man gebe Matrizen A, B an mit $AB = BA$, so dass gilt: jeder Eigenvektor von A ist Eigenvektor von B , aber die Umkehrung gilt nicht. Und man gebe Matrizen A, B an mit $AB = BA$, so dass gilt: Es gibt Eigenvektoren von A , die nicht Eigenvektoren von B sind, und es gibt Eigenvektoren von B , die nicht Eigenvektoren von A sind.

3. Zeige: (a) Die Abbildung

$$\eta: \mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot) \longrightarrow (M(2 \times 2, \mathbb{R}), +, \cdot) \quad \text{definiert durch} \quad \eta(a, b) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

ist ein injektiver Ring-Homomorphismus. Folgere daraus, dass die Menge aller reeller (2×2) -Matrizen der Form $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ein Körper ist.

(b) Man nennt eine Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine *Zentrums-Streckung*, wenn es eine positive reelle Zahl c gibt, sodass $f(a, b) = (ca, cb)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt. Man nennt eine Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine *Drehstreckung*, wenn sie die Hintereinanderschaltung einer Drehung um den Ursprung und einer Zentrums-Streckung ist. Zeige: Die Drehstreckungen sind gerade diejenigen linearen Abbildungen, die bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^2$ durch eine Matrix der Form $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ beschrieben werden.

4. Seien c, d komplexe Zahlen. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) Die beiden Zahlen $c + d$ und cd sind reell.
- (ii) Die beiden Zahlen c, d sind reell, oder aber $d = \bar{c}$.

Präsenz-Aufgaben.

Das Rechnen in $\mathbb{C}$.

1. Schreiben Sie $z = z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, z_1/z_2$ in der Form $z = \alpha + \beta i$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + 3i, & z_2 &= 3 - 5i \\ z_1 &= 2 + 4i, & z_2 &= -2 - i \\ z_1 &= 3 + 5i, & z_2 &= i \end{aligned}$$

2. Schreiben Sie z in der Form $z = \alpha + \beta i$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$z = i^{15}, \quad i^{-15}, \quad -i^{15}, \quad -i^{-15}, \quad i^{14}, \quad i^{-14}, \quad -i^{14}, \quad -i^{-14}.$$

3. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen z in der Form

$$z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$$

mit $\phi \in \mathbb{R}$.

$$z = 1 + i, \quad 1 - i, \quad -1 + i, \quad -1 - i.$$

4. Man bestimme alle komplexen Zahlen ω mit $\omega^6 = 1$. (Mit Skizze).

5. Sei $z \in \mathbb{C}$ weder reell noch rein imaginär. Man zeige:

- (a) Von den Punkten z und $\frac{1}{z}$ liegt einer in der oberen Halbebene, der andere in der unteren Halbebene.
(b) Die Punkte z und $\frac{1}{z}$ liegen entweder beide in der rechten Halbebene, oder beide in der linken Halbebene.

6. Gegeben seien die beiden Basen

$$\mathcal{B} = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right], \quad \mathcal{C} = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

von $\mathbb{R}^3$. Man betrachte die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Man berechne $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$.

Bemerkungen zur Präsenz-Aufgabe 4.4.

Aufgabe. Betrachte die folgende Matrix

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$. Zeige: Die einzigen C -invarianten Unterräume U von $\mathbb{R}^4$ sind 0 , $\mathbb{R}^2 \times 0^2$ und $\mathbb{R}^4$.

Vorbemerkung: Die reelle Matrix $D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ beschreibt die Ursprungs-Drehung mit Winkel $\frac{\pi}{2}$. Der einzige D -invariante Unterraum $W \neq 0$ von $\mathbb{R}^2$ ist $W = \mathbb{R}^2$. Warum? Erste Antwort: Es gibt keine Eigenvektoren zu D . Zweite Antwort: Ist $0 \neq x \in \mathbb{R}^2$, so sind die Vektoren x, Dx linear unabhängig.

Unsere Matrix C hat die Form $\begin{bmatrix} D & J \\ 0 & D \end{bmatrix}$ mit $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Insbesondere sieht man unmittelbar, dass $\mathbb{R}^2 \times 0^2$ ein C -invarianter Unterraum ist ...

Sei nun $0 \neq U$ ein C -invarianter Unterraum von $\mathbb{R}^4$.

(a) Ist $U \subseteq \mathbb{R}^2 \times 0^2$, so zeigt die Vorbemerkung, dass $U = \mathbb{R}^2 \times 0^2$ gilt.

(b) Wir nehmen also an, es gibt $x = [a \ b \ c \ d]^t \in U$ mit $[c \ d] \neq [0 \ 0]$ (und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Man rechnet nach: $y = C^2x + x$ ist ein von Null verschiedener Vektor, der zu $\mathbb{R}^2 \times 0^2$ gehört. Und natürlich gehört y auch zu U , also sehen wir schon: $\mathbb{R}^2 \times 0 \subseteq U$ (mit y gehört auch Cy zu U ...).

Übrigens ist $y = [c \ d \ 0 \ 0]^t$, und $Cy = [-d \ c \ 0 \ 0]^t$. Und natürlich ist $Cx = [* \ * \ -d \ c]^t$ (dass wir hier zwei der Koeffizienten nicht näher angeben, sondern einfach $*$ schreiben, soll bedeuten, dass es für die weitere Argumentation nicht darauf ankommt, wie diese Koeffizienten aussehen). Offensichtlich gilt: die Vektoren

$$y, Cy, x, Cx$$

sind linear unabhängig, bilden also eine Basis von $\mathbb{R}^4$. Da U eine Basis von $\mathbb{R}^4$ enthält, ist $U = \mathbb{R}^4$.

Ein kurzer Beweis für den Fall (b) würde also lauten: Sei $x \in U \setminus (\mathbb{R}^2 \times 0^2)$, setze $y = C^2x + x$. Dann sind die Vektoren y, Cy, x, Cx linear unabhängig und gehören zu U , also $U = \mathbb{R}^4$.

Die in der Aufgabe P 4.4 genannte Matrix A sieht etwas anders aus, als die oben verwendete Matrix C . Wie muss man für A den Beweis ändern? Und entsprechend kann man auch die folgenden Matrizen betrachten:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \dots$$

Zusatz. Man vergleiche den Beweis mit einem Beweis für folgende Behauptung: Sei A die (2×2) -Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die einzigen A -invarianten Unterräume in K^2 sind 0 , $K \times 0$, K^2 .

Übungsaufgaben 6.

Sei K ein Körper.

1. Sei $V = M(n \times n, K)$. Sei $C \in V$. Definiere eine Abbildung $f: V \rightarrow V$ durch $f(A) = CA$ für $A \in V$ (also jeweils Matrizen-Multiplikation mit der festen Matrix C von links). Zeige, dass f linear ist, und dass gilt:

$$\text{spur}(f) = n \cdot \text{spur}(C).$$

2. Seien B, C quadratische Matrizen. Zeige: Das Minimalpolynom der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Minimal-Polynome von B und C , dagegen ist das charakteristische Polynom von A das Produkt der charakteristischen Polynome von B und C .

3. Es gibt 16 Matrizen in $M(2 \times 2, \mathbb{F}_2)$. Welche dieser Matrizen sind diagonalisierbar, welche nicht?

4. Betrachte die folgende Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$. Zeige: Die einzigen A -invarianten Unterräume U von $\mathbb{R}^6$ sind 0 , $\mathbb{R}^2 \times 0^4$, $\mathbb{R}^4 \times 0^2$ und $\mathbb{R}^6$.

Präsenz-Aufgaben: 6 Quickies und 16 Matrizen.

1. Das charakteristische Polynom einer quadratischen Matrix A habe die Form

$$T^9 - T^8 + T^7 - T^6.$$

Welche Möglichkeiten gibt es dann für das Minimalpolynom μ_A ?

2. Das charakteristische Polynom einer Matrix A habe die Form $\phi_1^{m_1} \cdots \phi_t^{m_t}$ mit paarweise verschiedenen irreduziblen normierten Polynomen $\phi_1, \dots, \phi_t$ und Exponenten $m_i \geq 1$. Wie viele Möglichkeiten gibt es dann für das Minimalpolynom μ_A ?

3. Sei $f: V \rightarrow V$ diagonalisierbar mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_t$. Bestimme das Minimal-Polynom von f .

4. Zeige: Sind die Matrizen $A, B \in M(n \times n, K)$ ähnlich, und ist A nilpotent, so ist auch B nilpotent.

5. Ist A ähnlich zu einer Skalarmatrix B , so gilt $A = B$.

6. Ist λ Eigenwert einer invertierbaren Matrix A , so ist λ^{-1} Eigenwert zu A^{-1} .

-
7. Es gibt 16 Matrizen in $M(2 \times 2, \mathbb{R})$, die als Koeffizienten nur Nullen und Einsen haben. 12 dieser Matrizen sind diagonalisierbar, 4 dagegen nicht — Welche?

Übungsaufgaben 7.

1. Betrachte die folgende Matrix $A \in M(4 \times 4; \mathbb{Q}^4)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mit charakteristischem Polynom χ_A . Schreibe $\chi_A = \phi_1^{m_1} \cdots \phi_t^{m_t}$ mit paarweise verschiedenen irreduziblen normierten Polynomen $\phi_1, \dots, \phi_t$. Bestimme die Unterräume $U_i = \text{Ker}(\phi_i^{m_i}(A))$.

2. Betrachte die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wie sehen die Jordan'sche Normalformen aus?

3. Sei $\chi_A = \sum_{i=0}^n c_i T^i$ das charakteristische Polynom der Matrix $A \in M(n \times n, K)$ (mit $c_i \in K$).

(a) Zeige: $-c_{n-1}$ ist die Spur der Matrix A und $c_0 = (-1)^n \det(A)$.

(b) Zeige: Ist A invertierbar, so gibt es ein Polynom $\phi \in K[T]$ mit Grad $n-1$, sodass gilt:

$$A^{-1} = \phi(A).$$

4. Wie viele Partitionen p von $n = 10$ gibt es? Wie viele dieser Partitionen sind selbst-dual?

Präsenz-Aufgaben.

1. Wie kann man am einfachsten beweisen, dass die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & 0 & 3 & 4 & 5 \\ & & & 0 & 4 & 5 \\ 0 & & & & 0 & 5 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R})$$

zum Jordanblock $J(6)$ ähnlich ist?

Wie findet man eine invertierbare Matrix P mit $P^{-1}AP = J(6)$?

2. Sei K ein Körper und $A \in M(n \times n, K)$ nilpotent, und zwar ähnlich zu $J(p)$, wobei $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ eine Partition von n ist. Sei μ_A das Minimalpolynom von A . Zeige:

(a) $\mu_A = T^{p_1}$.

(b) Genau dann ist $\mu_A = \chi_A$, wenn $m = 1$ gilt.

3. Sei $\gamma \in K$. Sei $A = (a_{ij})_{ij}$ eine obere $(n \times n)$ -Dreiecks-Matrix mit Koeffizienten in K , sei $a_{ii} = \gamma$ für $1 \leq i \leq n$. Zeige: Ist A ähnlich zu $\gamma E_n + J(n)$, so ist $a_{i,i+1} \neq 0$ für $1 \leq i < n$.

4. Wie sieht die Jordan'sche Normalform eines Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ (mit V endlich-dimensionaler Vektorraum) aus, für den $\text{Kern}(f) = \text{Bild}(f)$ gilt?

5. Sei K ein Körper. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Das charakteristische Polynom χ_A zerfalle in Linearfaktoren. Zeige: Genau dann ist A diagonalisierbar, wenn das Minimalpolynom μ_A keine mehrfachen Nullstellen hat.

6. Sei K ein Körper, sei $A \in M(n \times n, K)$. Sei $\gamma \in K$ ein Eigenwert von A mit eindimensionalem Eigenraum $\text{Eig}(A, \gamma)$. Es sei

$$\chi_A = (T - \gamma)^d \phi$$

und $T - \gamma$ sei kein Teiler von ϕ . Zeige: A ist ähnlich zu einer Matrix der Form

$$(\gamma E_d + J(d)) \oplus B,$$

dabei ist B eine $(n - d) \times (n - d)$ Matrix.

Bemerkung zur Präsenz-Aufgabe 7.4

Sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Ist $\text{Bild}(f) \subseteq \text{Kern}(f)$, so ist $f^2 = 0$, insbesondere ist f nilpotent ...

Welche Möglichkeiten gibt es für die zugehörige Partition?

Was passiert, wenn sogar $\text{Bild}(f) = \text{Kern}(f)$ gilt?

Man braucht aber für diese Aufgabe gar keine Theorie!

Wie zeigt man für einen beliebigen Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ die folgende Formel?

$$\dim V = \dim \text{Kern}(f) + \dim \text{Bild}(f)$$

Man wählt eine Basis $v_1, \dots, v_t$ von $\text{Kern}(f)$, und setzt sie durch Vektoren $v_1, \dots, v_n$ zu einer Basis von V fort.

Zeige: Ist $\text{Bild}(f) = \text{Kern}(f)$, so ist

$$v_{t+1}, \dots, v_n, f(v_{t+1}), \dots, f(v_n)$$

eine Basis von V .

Die Matrizendarstellung bezüglich dieser Basis (vielleicht muss man sie noch in einer anderen Reihenfolge schreiben??) ist die Jordan'sche Normalform.

Übungsaufgaben 8.

Sei K ein Körper.

1. (a) Seien V, W Vektorräume, sei $f: V \rightarrow W$ ein Homomorphismus. Seien U, U' Unterräume von V mit $V = U \oplus U'$. Zeige: Ist $U \subseteq \text{Kern}(f)$ und ist die Einschränkung $f|_{U'}$ injektiv, so ist $U = \text{Kern}(f)$.

(Hinweis: Ist $f: V \rightarrow W$ eine Abbildung, und ist U eine Teilmenge von V , so ist die Einschränkung $g = f|_U$ diejenige Abbildung $g: U \rightarrow W$, die durch $g(x) = f(x)$ für alle $x \in U$ definiert ist.)

(b) Verwende (a), um Lemma 4.8.3 zu beweisen.

2. Betrachte die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

in $M(4 \times 4, \mathbb{C})$. Zeige, wie man eine invertierbare Matrix $P \in M(4 \times 4, \mathbb{C})$ findet, für die $P^{-1}AP$ in Jordan'scher Normalform ist. Bestimme zwei verschiedene derartige Matrizen P .

3. Sei $A \in M(n \times n, K)$ mit $n \geq 1$.

(a) Sei $0 \neq v \in K^n$. Sei ϕ ein Polynom in $K[T]$ mit $\phi(A)v = 0$. Zeige: ϕ und χ_A sind nicht teilerfremd.

(b) Folgere daraus: Ist χ_A irreduzibel, und ist $0 \neq v \in K^n$, so sind die Vektoren $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ linear unabhängig (bilden also eine Basis). (Insbesondere gilt: Die einzigen A -invarianten Unterräume von K^n sind 0 und K^n).

4*. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Das charakteristische Polynom χ_A sei irreduzibel. Sei

$$\Gamma_A = \{B \in M(n \times n, K) \mid BA = AB.\}$$

Zeige: $\Gamma_A = L(E_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$, $\dim \Gamma_A = n$, und Γ_A ist ein Körper.

Anleitung. Zeige nacheinander:

(a) Γ_A ist ein Ring, $L(E_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}) \subseteq \Gamma_A$, $\dim L(E_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}) = n$.

(b) Jede von Null verschiedene Matrix $C \in \Gamma_A$ ist invertierbar. (Hinweis: Betrachte den Kern von C und wende 3.(b) an.)

(c) Es gilt $\Gamma_A = L(E_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$. (Hinweis: Sei $C \in \Gamma_A$. Wähle $0 \neq v \in K^n$ beliebig. Nach 3.(b) ist $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ eine Basis. Schreibe $Cv = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i v$ mit $\lambda_i \in K$ und zeige, dass die Matrix $C - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i$ nicht invertierbar sein kann. Also ...)

(d) Aus (a), (b) und (c) folgt, dass Γ_A ein Körper ist.

Hinweis: Ein typisches Anwendungsbeispiel ist $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Was ist in diesem Fall Γ_A ?

Präsenz-Aufgaben.

1. Sei $A \in M(n \times n, K)$ mit Minimalpolynom μ_A . Sei ϕ ein Teiler von μ_A mit $0 < \deg \phi < \deg \mu_A$. Zeige:

$$\{x \in K^n \mid \phi(A)x = 0\}$$

ist ein A -invarianter Unterraum, der weder gleich 0 , noch gleich K^n ist.

2. Betrachte die folgende Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

in $M(2 \times 2, \mathbb{R}) \subset M(2 \times 2, \mathbb{C})$.

(a) Bestimme alle A -invarianten Unterräume von $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimme alle A -invarianten Unterräume von $\mathbb{C}^2$.

3. Sei $t \in \mathbb{R}$. Man bestimme die Jordan'sche Normalform über $\mathbb{C}$ der folgenden Matrix:

$$\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

4. Zeige: Sei $P \in M(n \times n, K)$ invertierbar. Zeige: Die Abbildung $A \mapsto P^{-1}AP$ ist ein Ring-Isomorphismus $M(n \times n, K) \rightarrow M(n \times n, K)$.

5. Zeige: Sei $A \in M(n \times n, K)$. Gesucht ist eine invertierbare Matrix P mit $P^{-1}AP = A^t$ (dabei sei A^t die Transponierte von A).

Zusatzaufgaben: zur Jordanschen Normalform

Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, so sei $\text{Kern}(A) = \text{Kern}(l_A)$.

1. Sei $A \in M(8 \times 8, \mathbb{R})$, mit charakteristischem Polynom

$$\chi_A = T^8 - T^7$$

und es sei:

$i =$	1	2	3	4	5
$\dim \text{Kern}(A^i) =$	3	5	6	7	7

Wie sieht die Jordansche Normalform von A aus?

2. Sei $A \in M(8 \times 8, \mathbb{R})$ mit charakteristischem Polynom

$$\chi_A = (T - 1)(T - 2)^4(T - 3)^3.$$

Es sei

$$\dim \text{Kern}(A - 2E_8) = 1$$

$$\dim \text{Kern}(A - 3E_8) = 1$$

Wie sieht die Jordansche Normalform von A aus?

3. Es gibt 8 Jordansche Normalformen von Matrizen $A \in M(8 \times 8, \mathbb{R})$ mit Minimalpolynom

$$\mu_A = (T - 1)^3(T - 2)^2(T - 3).$$

Welche?

4. Wie sehen die Jordanschen Normalformen der Matrizen A mit charakteristischem Polynom χ_A :

$$(T - 1)^3(T - 2)^3(T - 3),$$

$$(T - 1)^4(T - 2)^4,$$

$$(T - 1)^8.$$

Übungsaufgaben 9.

1. Orthonormalisierung. (a) Sei U ein Unterraum von V . Sei $u_1, \dots, u_m$ eine Orthonormalbasis von U . Ist $v \in V$, so setze

$$v' = v - \sum_{s=1}^m \langle v, u_s \rangle u_s.$$

Zeige erstens: $v' \in U^\perp$. Zweitens: Ist $v \in U$, so ist $v' = 0$. Drittens: Ist $v \notin U$, so sind die Vektoren $u_1, \dots, u_m, v'$ linear unabhängig.

(b) Folgere daraus: Jede Orthonormalfolge eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums lässt sich zu einer Orthonormalbasis ergänzen. Insbesondere gilt also: Jeder endlich-dimensionale unitäre Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis.

2. Seien $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrische Matrizen. Zeige

(a) Ist A invertierbar, so ist auch A^{-1} symmetrisch. Ganz allgemein gilt: Die Adjunkte A^* ist symmetrisch.

(b) Genau dann ist AB symmetrisch, wenn $AB = BA$ gilt.

3. Bestimme zur folgenden Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

eine orthogonale Matrix S , so dass $S^t A S$ eine Diagonalmatrix ist.

4.

(a) Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Sei $J: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung mit $J^2 = -\text{id}$. Zeige: definiert man $\mathbb{C} \times V \rightarrow V$ durch $(x + iy, v) \mapsto xv + yJ(v)$ für $x, y \in \mathbb{R}$, so ist V mit dieser Skalarmultiplikation ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

(b) Umgekehrt gilt: Ist W ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum, so kann man W wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ auch als $\mathbb{R}$ -Vektorraum auffassen, man schreibt dann ${}_{\mathbb{R}}W$. Behauptung: die Abbildung $f: W \rightarrow W$, mit $f(w) = iw$ für $w \in W$ ist $\mathbb{R}$ -linear und erfüllt die Bedingung $f^2 = -\text{id}$.

Sei nun wieder V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $J: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung mit $J^2 = -\text{id}$. Zeige:

(c) Ist V endlich-dimensional (als $\mathbb{R}$ -Vektorraum), so ist $\dim V$ gerade.

(d) Ist U ein J -invarianter Unterraum von V , so gibt es einen J -invarianten Unterraum U' von V mit $V = U \oplus U'$.

(Man nennt J eine *komplexe Struktur* auf dem Vektorraum V).

Präsenz-Aufgaben.

1. Sei V ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum, sei $\langle -, - \rangle$ eine hermitesche Form auf V . Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V . Behauptung: Auch wenn $\langle v_s, v_s \rangle > 0$ für $1 \leq s \leq t$ gilt, so braucht $(V, \langle -, - \rangle)$ kein unitärer Raum zu sein.

Das Rechnen in unitären Räumen

Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein unitärer Vektorraum.

2. Zeige: Sind die Vektoren v_1, v_2 orthogonal, und sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, so sind die Vektoren $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2$ orthogonal.

3. Die Vektoren $v_1, \dots, v_t \in V$ seien paarweise orthogonal und es gelte $v_s \neq 0$ für alle $1 \leq s \leq t$. Zeige: Die Vektoren $v_1, \dots, v_t \in V$ sind linear unabhängig.

4. Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V . Sind diese Vektoren paarweise orthogonal, und setzt man $\bar{v}_s = \frac{1}{\|v_s\|} v_s$, so bilden die Vektoren $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_t$ eine Orthonormalbasis von V .

5. Die Vektoren $v_1, \dots, v_t \in V$ seien eine Orthonormalbasis von V . Sei $v \in V$. Ist $\lambda_s = \langle v, v_s \rangle$, so ist $v = \sum_{s=1}^t \lambda_s v_s$.

Übungsaufgaben 10.

Euklidische und unitäre Vektorräume.

1. Alltagswissen (Nachtrag zu LA I).

- (a) Warum vertauscht ein Spiegel links und rechts, aber nicht oben und unten?
- (b) Wie groß muss ein Spiegel sein, damit man sich vollständig darin sehen kann, wenn man 1 m davon entfernt ist? Und wie groß, wenn man 2 m davon entfernt ist?
- (c) Gute Korkenzieher für Weinflaschen bestehen aus einer Spirale. Es gibt auch Korkenzieher für Linkshänder. Nimmt man einen normalen Korkenzieher und einen für Linkshänder, so kann man sie schön ineinander drehen (Bild auf der Homepage). Oder etwa nicht?
- (d) Jede Spiegelung der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist die Einschränkung einer Drehung des $\mathbb{R}^3$.
- (Zu jeder Matrix $A = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{bmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ gibt es eine orthogonale Matrix der Form

$$B = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) & c_1 \\ \sin(t) & -\cos(t) & c_2 \\ d_1 & d_2 & e \end{bmatrix}$$

mit Determinante $\det B = 1$. Wie sehen die Zahlen c_1, c_2, d_1, d_2, e aus?) Wie findet man die Drehachse dieser Drehung?

2. Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum, sei $f: V \rightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus mit kleinstem Eigenwert λ und größtem Eigenwert μ (zur Erinnerung: die Eigenwerte von f sind reell, also gibt es einen kleinsten und einen größten).

Zeige: Für $0 \neq v \in V$ gilt:

$$\lambda \leq \frac{\langle f(v), v \rangle}{\langle v, v \rangle} \leq \mu.$$

Für welche v steht links oder rechts das Gleichheitszeichen?

3. Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum, sei $f: V \rightarrow V$ linear.

(a) Zeige: Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$, sodass die Matrizendarstellung $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist. (b) Kann man sogar erreichen, dass A in Jordanscher Normalform ist?

4. Sei π eine Permutation von $\{1, 2, \dots, n\}$ und $A(\pi) = (a_{st})_{st} \in M(n \times n, \mathbb{C})$ die zugehörige Permutationsmatrix (mit $a_{\pi(t), t} = 1$ für $1 \leq t \leq n$ und $a_{st} = 0$ sonst). Zeige: $A(\pi)$ ist diagonalisierbar. Bestimme die Eigenwerte und für jeden Eigenwert seine Multiplizität.

Hinweis: Betrachte zuerst den Fall der zyklischen Permutation ζ mit $\zeta(t) = t + 1$ für $1 \leq t < n$. Wie kann man den allgemeinen Fall auf diesen Spezialfall zurückführen?

Präsenz-Aufgaben.

1. Sei $A = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{bmatrix}$ mit $\phi \in \mathbb{R}$. Gesucht ist eine orthogonale Matrix S , so dass $S^t A S$ eine Diagonalmatrix ist.
2. Man diagonalisiere die komplexe Matrix $\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$
3. Sei A eine hermitesche Matrix in $M(2 \times 2, \mathbb{C})$. Zeige: Hat das charakteristische Polynom χ_A eine doppelte Nullstelle, so ist A eine Skalar-Matrix.
4. Es gibt nur eine nilpotente hermitesche Matrix in $M(n \times n, \mathbb{C})$.
5. Ein Endomorphismus $f \in \text{End}(V)$ heißt *involutorisch*, wenn $f^2 = \text{id}$ gilt. Man zeige: Sei V endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum. Hat $f \in \text{End}(V)$ zwei der drei Eigenschaften: selbstadjungiert, unitär, involutorisch, so hat sie auch die dritte.

Übungsaufgaben 11.

1. Alltagswissen. Betrachte die reellen Matrizen

$$D(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad S(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{bmatrix}$$

mit $0 \leq \phi < 2\pi$. Welche dieser Matrizen sind ähnlich? Zu formulieren und zu zeigen sind also drei Aussagen, vielleicht in folgender Form (oder auch anders):

- (1) $D(\phi)$ und $D(\phi')$ sind genau dann ähnlich, wenn ...
- (2) $S(\phi)$ und $S(\phi')$ sind genau dann ähnlich, wenn ...
- (3) $D(\phi)$ und $S(\phi')$ sind genau dann ähnlich, wenn ...

2. Wir betrachten die Menge $M(n \times n, \mathbb{C})$ als einen **reellen** Vektorraum (bezüglich Matrizenaddition und Skalarmultiplikation).

(a) Zeige: Die Menge der hermiteschen Matrizen ist ein Unterraum, man gebe eine Basis an.

(b) Man gebe zwei hermitesche (2×2) -Matrizen A, B an, sodass AB nicht hermitesch ist. Folgere daraus: die Menge der hermiteschen $(n \times n)$ -Matrizen ist genau dann ein Unterring des Matrizenrings $M(n \times n, \mathbb{C})$, wenn ...

3. Eine Matrix A heißt *schief-symmetrisch*, wenn $A = -A^t$ gilt. Zeige: Die (komplexen) Eigenwerte einer schief-symmetrischen reellen Matrix sind rein imaginär (also von der Form ri mit $r \in \mathbb{R}$).

4. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bestimme eine orthogonale Matrix P , sodass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.

Präsenz-Aufgaben.

1. Alltagswissen.

(a) Seien u, v zwei Vektoren in $\mathbb{R}^n$ der gleichen Länge und sei $n \geq 2$. Dann gibt es eine orthogonale Matrix A mit Determinante 1 und $Au = v$. (Warum braucht man $n \geq 2$?) Um Alltagswissen handelt es sich natürlich nur für $n = 2$ und $n = 3$.

(b) Zeige: Der Satz vom Fußball: Bei jedem Fußballspiel gibt es zwei Punkte auf der Oberfläche des Fußballs, die sich zu Beginn der ersten und der zweiten Halbzeit (wenn der Ball auf dem Anstoßpunkt liegt) an der gleichen Stelle im umgebenden Raum befinden.

2. Man orthonormalisiere die beiden Folgen

$$\begin{aligned} u_1 &= \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & u_2 &= \begin{bmatrix} 1+i \\ 2+i \\ 0 \end{bmatrix}, & u_3 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, & \text{und} \\ u_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, & u_2 &= \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & u_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1+i \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. Gesucht ist eine quadratische Form $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sodass die Nullstellenmenge

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid q(x) = 1\}$$

(a) eine Ellipse (kein Kreis),

(b) eine Hyperbel

ist, und zwar soll jeweils eine der Hauptachsen die Ursprungsgerade durch $[2 \ 1]^t$ sein.

4. Seien f, g selbstadjungierte Endomorphismen. Zeige: Genau dann ist fg selbstadjungiert, wenn $fg = gf$ gilt.

4'. Seien $A, B \in M(n \times n, \mathbb{C})$ hermitesche Matrizen. Zeige: Genau dann ist AB hermitesch, wenn $AB = BA$ gilt.

Übungsaufgaben 12.

1. Affinitäten. Sei $\mathcal{A}(n)$ die Menge der $(n+1) \times (n+1)$ -Matrizen der Form

$$G_{A,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{bmatrix},$$

dabei sei A in $M(n \times n, K)$ und a in $M(n \times 1, K) = K^n$. Für $a \in K^n$, setze $T_a = G_{E_n, a}$. Für $A \in GL(n, K)$, setze $\phi_A = G_{A, 0}$.

Definiere eine Abbildung $\eta: \mathcal{A}(n) \rightarrow GL(n, K)$ durch $\eta(G_{A,a}) = A$.

(a) Zeige: $\mathcal{A}(n)$ ist eine Untergruppe von $GL(n+1, K)$ und die Teilmengen

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(n) &= \{T_a \mid a \in K^n\} \\ \mathcal{G}(n) &= \{\phi_A \mid A \in GL(n, K)\} \end{aligned}$$

sind Untergruppen von $\mathcal{A}(n)$; die Zuordnung η ist ein Gruppen-Homomorphismus

$$\mathcal{A}(n) \rightarrow GL(n, K).$$

(b) Zeige: Jedes Element $g \in \mathcal{A}(n)$ lässt sich als

$$g = T_a \phi_A \quad \text{und auch als} \quad g = \phi_B T_b$$

mit $a, b \in K^n$, und $A, B \in GL(n, K)$ schreiben.

(c) Zeige: Ist $T_a \phi_A = \phi_B T_b$ mit $a, b \in K^n$, und $A, B \in GL(n, K)$, so ist $A = B$.

(d) Zeige: Ist $T_a \phi_A = \phi_B T_b$ mit $a, b \in K^n$, und $A, B \in GL(n, K)$, so muss nicht $a = b$ gelten.

2. Projektive Ebenen. Sei K Körper. Sei $\mathcal{P}$ die Menge der ein-dimensionalen Unterräume von K^3 und $\mathcal{G}$ die Menge der zwei-dimensionalen Unterräume von K^3 . (Man nennt $\mathcal{P}$ die Menge der *Punkte der projektiven Ebene* $\mathbb{P}^2$ und $\mathcal{G}$ die der *Geraden*). Zeige:

(a) Zu $P \neq P'$ in $\mathcal{P}$ gibt es genau ein $G \in \mathcal{G}$ mit $P \subset G$ und $P' \subset G$.

(b) Zu $G \neq G'$ in $\mathcal{G}$ gibt es genau ein $P \in \mathcal{P}$ mit $P \subset G$ und $P \subset G'$.

(c) Die Zuordnung $\eta: K^2 \rightarrow \mathcal{P}$, die durch

$$\eta(x) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}\right)$$

für $x \in K^2$ definiert ist, ist injektiv. Wie sieht das Bild aus?

(d) Zeige, dass es zu jeder Geraden g in K^2 ein $G \in \mathcal{G}$ mit $\eta(x) \subset G$ für alle $x \in g$ gibt.
 Zusatz: Man versuche im Fall $K = \mathbb{F}_2$ die Mengen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{G}$ auf einem Blatt Papier zu skizzieren (und zwar $\mathcal{P}$ als Menge von echten Punkten, und jedes Element $G \in \mathcal{G}$ als einen Linienzug, der alle $P \in \mathcal{P}$ mit $P \subset G$ verbindet).

3. Bestimme Hauptachsen für die reelle quadratische Form

$$3X^2 + 2Y^2 + Z^2 - 4XY - 4YZ.$$

4. Seien natürliche Zahlen i_r, j_r mit $1 \leq r \leq s$ gegeben, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$j_r < i_r, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s$$

(mit $1 \leq r \leq s$). Sei $\mathcal{A}$ die Menge der $(n \times n)$ -Matrizen $A = (a_{ij})_{ij}$ mit folgender Eigenschaft: Ist $i \neq j$ und $a_{ij} \neq 0$, so gibt es ein r mit $i \geq i_r$ und $j \leq j_r$. Zeige: $\mathcal{A}$ ist ein Unterring des Matrizenrings $M(n \times n, K)$. Welche Elemente in $\mathcal{A}$ sind invertierbar?

Präsenz-Aufgaben.

1. Mit $\mathcal{B}(1)$ bezeichnen wir die Bewegungsgruppe des euklidischen Raums $\mathbb{R}^1$. Einige Elemente sind:

$$\begin{aligned} t_a & \text{ mit } t_a(x) = x + a, & \text{für alle } a \in \mathbb{R}. \\ r & \text{ mit } r(x) = -x. \end{aligned}$$

Man zeige:

$$\mathcal{B}(1) = \{t_a, t_a r \mid a \in \mathbb{R}\},$$

und diese Elemente sind paarweise verschieden.

Man berechne die Produkte $t_a t_b, r t_a, r r$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Sei $\langle -, - \rangle$ die durch die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ gegebene Bilinearform auf $V = \mathbb{R}^4$. Gesucht sind

- (a) drei 2-dimensionale Unterräume $U \subset V$, auf denen $\langle -, - \rangle$ positiv definit ist.
- (b) drei 1-dimensionale Unterräume $U \subset V$, auf denen $\langle -, - \rangle$ negativ definit ist.
- (c) drei 2-dimensionale Unterräume $U \subset V$, auf denen $\langle -, - \rangle$ identisch Null ist.

3. Bestimme Hauptachsen für die reelle quadratische Form

$$X^2 + Y^2 + 4Z^2 + 4XY + 4XZ + 8YZ.$$

Übungsaufgaben 13.

1. Sei q ein reelles quadratisches Polynom, sodass $F = V(q)$ ein einschaliges Hyperboloid im $\mathbb{R}^3$ ist. Zeige: Liegt der Punkt P auf der Fläche F , so gibt es zwei verschiedene Geraden G_1, G_2 auf der Fläche F , die sich in P schneiden.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, dies zu beweisen. Hier ein Vorschlag für einen Beweis, der länglich, aber nachvollziehbar ist:

(a) Betrachte zuerst das einschalige Hyperboloid $F = V(q)$ mit $q(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 - Z^2 - 1$ und den Punkt $P = (1, 0, 0)$. (1) Zeige: Ist G eine Gerade, die den Punkt P enthält, so gibt es $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $G = \{(1 + (at, bt, ct) \mid t \in \mathbb{R}\}$. (2) Aus $G \subset F$ folgt, dass das Tripel (a, b, c) spezielle Eigenschaften haben muss. Welche? Auf diese Weise folgt die Behauptung für $P = (1, 0, 0)$. (3) Wähle nun eine Gerade G mit $(1, 0, 0) \in G \subset F$. Zeige: Die Drehungen mit der z -Achse als Drehachse (und Drehwinkel $\leq \phi < 2\pi$) liefern weitere Geraden auf F und es gilt: F ist die disjunkte Vereinigung dieser Geraden. Insbesondere erhalten wir zu jedem Punkt P auf der Fläche eine Gerade, die P enthält und auf der Fläche liegt. (4) Wie folgt nun die Behauptung für $q(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 - Z^2 - 1$?

(b) Betrachte nun ein beliebiges einschaliges Hyperboloid $F = V(q)$, dabei kann man allerdings (wegen des Klassifikationssatzes) voraussetzen, dass $q(X, Y, Z) = r_1 X^2 + r_2 Y^2 - r_3 Z^2 - 1$ mit positiven reellen Zahlen r_1, r_2, r_3 gilt.

2. (a) Sei $A \in M(n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Setze $f(x) = x^t A x$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige: Die Menge

$$Z(f) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = f(x+z) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n\}$$

ist ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Bestimme seine Dimension in Abhängigkeit vom Rang der Matrix A .

(b) Betrachte die isometrischen Normalformen reeller quadratischer Formen f in 3 Variablen und bestimme in allen Fällen $Z(f)$. (Verwende die Liste der isometrischen Normalformen aller reeller quadratischen Polynome; hier interessieren uns nur diejenigen, die homogen sind).

3. (a) Sei β eine uneigentliche Bewegung des $\mathbb{R}^2$. Zeige: β^2 ist eine Translation.

(Algebraisch: ein Einzeilenbeweis; man gebe zusätzlich eine geometrische Beschreibung)

Hinweis: Eine Bewegung ist eine Hintereinanderschaltung einer orthogonalen Abbildung und einer Translation. Sie heißt uneigentlich, wenn die Determinante der orthogonalen Abbildung -1 ist.

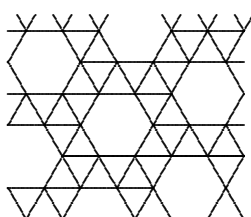
(b) Man zeige: Genau dann ist ein Endomorphismus von $\mathbb{R}^2$ eine Spiegelung, wenn er die Eigenwerte 1 und -1 hat und wenn die zugehörigen Eigenvektoren zueinander orthogonal sind.

4. (Kombinatorische Überlegungen, die in den nächsten Wochen gebraucht werden).

(a) Seien $k, n \geq 3$ natürliche Zahlen mit $\frac{k(n-2)}{n} < 2$. Bestimme alle Möglichkeiten für k, n . Es gibt eine natürliche Bijektion zwischen diesen Paaren (k, n) und den platonischen Körpern (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Isokaeder) — wie könnte die aussehen?

(b) Sei $(n_1, \dots, n_t)$ eine Folge natürlicher Zahlen $n_i \geq 3$ mit $\sum_i \frac{n_i-2}{n_i} = 2$, zum Beispiel $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$, $(3, 3, 4, 3, 4)$, $(3, 3, 3, 4, 4)$, $(3, 3, 3, 3, 6)$, $\dots$

Wieviele derartige Folgen gibt es (bis auf zyklische Vertauschungen und Umkehr der Reihenfolge)? Zu jeder solchen Folge versuche man, eine “Pflasterung” der Ebene aus regulären n_i -Ecken mit Kantenlänge 1 zu konstruieren, dabei sollen in jedem Eckpunkt ein n_1 -Eck, ein n_2 -Eck, usw. aneinanderstoßen, entsprechend der Folge $(n_1, n_2, \dots, n_t)$ (oder ihrer Umkehrung). In genau 11 Fällen ist dies möglich! Hier als Beispiel ein Ausschnitt der Pflasterung zur Folge $(3, 3, 3, 3, 6)$:



Präsenz-Aufgaben.

1. Man bestimme die Hauptachsen der Quadrik

$$2X^2 - 2\sqrt{2}XY + 3Y^2 = 1.$$

2. Wie lautet die erweiterte Koeffizientenmatrix für das quadratische Polynom

$$X^2 + XY + 2Y^2 - 2X - 2Y + 17$$

3. Sei d_0 die Drehung der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Zentrum der Ursprung und Winkel $\pi/2$, sei d_1 die Drehung der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Zentrum $e_1 = [1 \ 0]^t$ und Winkel $\pi/2$. Zeige: $d_1 d_0$ ist Drehung mit Zentrum $[\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2}]^t$ und Winkel π .

4. Sei $f \in \mathcal{B}(2)$ uneigentliche Bewegung mit $f^2 = t_a$ mit $a = [6 \ 6]^t$. Schreibe f in der Form $f = t_b \circ \phi$ mit $\phi \in \mathcal{O}(2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$.

5. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Man bestimme eine orthogonale Matrix P , sodass $P^{-1}AP$ Diagonalmatrix ist. Vorgegeben wird: Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_A(T) = T^4 - 12T^3 + 48T^2 - 64T = T(T-4)^3.$$

Präsenz-Aufgaben 14.

1. Die folgenden reellen symmetrischen Matrizen liefern symmetrische Bilinearformen. Mit Hilfe des Minoren-Kriteriums entscheide man, welche dieser Bilinearformen positiv definit sind:

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

2. Unter

<http://www.math.uni-bielefeld.de/birep/la2/friese.html>

finde man eine Fülle von Friesen. Man bestimme jeweils den Typ.

3. Unter

<http://www.math.uni-bielefeld.de/birep/la2/muster.html>

finde man sechs Muster. Man bestimme jeweils den Typ der zugehörigen ebenen Kristallgruppe.

4. Geben Sie zu jeder der 17 ebenen Kristallgruppen G die Punktgruppe $\overline{G}$ an: Ist $\overline{G}$ eine Drehgruppe, so soll ein erzeugendes Element von $\overline{G}$ angegeben werden. Ist $\overline{G}$ keine Drehgruppe, so gebe man ein erzeugendes Element der Untergruppe aller Drehungen und zusätzlich Spiegelachsen und Gleitspiegelachsen an, so dass für die zugehörigen Bewegungen $h_1, \dots, h_n$ gilt: Die Restklassen $\overline{h}_1, \dots, \overline{h}_n$ in $\overline{G}$ sind paarweise verschieden und liefern alle Spiegelungen in $\overline{G}$.

Die 7 Friesgruppen

Fall A: Alle Symmetrien sind eigentlich. Gibt es keine Drehungen, so Typ 1, gibt es welche, so Typ 2.

Fall B1: Es gibt uneigentliche Symmetrien, und keine Drehungen. Gibt es eine Spiegelachse, die unter den Translationen invariant bleibt, so Typ 3, gibt es Spiegelachsen, die unter den Translationen nicht invariant bleiben, so Typ 4, gibt es keine Spiegelachse, so Typ 5.

Fall B2: Es gibt uneigentliche Symmetrien und auch Drehungen. Gibt es keine Spiegelachse, die unter den Translationen invariant bleibt, so Typ 6, andernfalls Typ 7.

Die 17 ebenen Kristallgruppen

Es gibt 17 verschiedene ebene Kristallgruppen. Hier ein **Entscheidungsverfahren** zur Bestimmung des jeweiligen Typs. Sei G eine ebene Kristallgruppe, sei d die höchste Ordnung einer Drehung in G . Es sei $\overline{G}$ die zugehörige Punktgruppe.

(Gleitspiegelachsen bezeichnen wir einfach als Achsen. Unter einem Viererzentrum verstehen wir das Drehzentrum einer Drehung der Ordnung 4; analog ist ein Dreierzentrum definiert.)

d	Typ	$\overline{G}$
Fall 1. <i>Alle Symmetrien in G sind eigentliche Bewegungen.</i>		
1	p1	$\mathcal{C}_1$
2	p2	$\mathcal{C}_2$
3	p3	$\mathcal{C}_3$
4	p4	$\mathcal{C}_4$
6	p6	$\mathcal{C}_6$
Fall 2. <i>Es gibt Symmetrien in G, die uneigentliche Bewegungen sind.</i>		
1 Jede Achse ist Spiegelachse.	pm	$\mathcal{D}_1$
Es gibt keine Spiegelachse.	pg	$\mathcal{D}_1$
Es gibt Spiegelachsen, aber auch Achsen, die keine Spiegelachsen sind.	cm	$\mathcal{D}_1$
2 Jedes Drehzentrum liegt auf zwei orthogonalen Spiegelachsen.	pmm	$\mathcal{D}_2$
Ein Drehzentrum liegt auf genau einer Achse.	pmg	$\mathcal{D}_2$
Ein Drehzentrum liegt auf keiner Achse.	pgg	$\mathcal{D}_2$
Es gibt ein Drehzentrum, das auf zwei orthogonalen Achsen, die keine Spiegelachsen sind, liegt.	cmm	$\mathcal{D}_2$
3 Jedes Dreierzentrum liegt auf einer Spiegelachse.	p3m1	$\mathcal{D}_3$
Es gibt ein Dreierzentrum, das auf keiner Spiegelachse liegt.	p31m	$\mathcal{D}_3$
4 Ein Viererzentrum liegt auf einer Spiegelachse.	p4m	$\mathcal{D}_4$
Ein Viererzentrum liegt auf keiner Spiegelachse.	p4g	$\mathcal{D}_4$
6	p6m	$\mathcal{D}_6$