1. Betrachte die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Es gibt im K^2 vier A-invarianten Unterräume: neben 0^2, $K \times 0$ und K^2 selbst gibt es noch einen vierten. Welchen? (Nur Antwort).

2. Seien $A, B \in M(n \times n, K)$ und $\lambda \in K$. Beweise: Ist $AB = BA$, so ist $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$ B-invarianter Unterraum.

3. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Beweise: Ist A invertierbar, so gibt es ein Polynom $p(T) \in K[T]$ mit $A^{-1} = p(A)$.

4. Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Man gebe eine invertierbare Matrix P an, sodass gilt: $P^{-1}AP = J(3, 1)$ (die Jordansche Normalform einer nilpotenten Matrix zur Partition $(3, 1)$). (Nur Antwort).

5. Sei d der größte gemeinsame Teiler der Zahlen 427 und 322. Bestimme mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus ganze Zahlen a, b mit $d = 427\,a + 322\,b$.

6. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und f ein Endomorphismus von V mit $f^2 = f$. Wie sieht die Jordansche Normalform von f aus? (Nur Antwort).

7. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:

(1) Ist $2v$ Eigenvektor zur Matrix A, so ist auch v ein Eigenvektor zu A.

(2) Diagonalisierbare Matrizen mit gleichem charakteristischen Polynom sind ähnlich.

(3) Jede symmetrische reelle Matrix ist diagonalisierbar.

(4) Ist A unitäre Matrix und λ ein Eigenwert von A, so ist $\lambda \neq 0$.

8. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Das charakteristische Polynom χ_A sei $(T - 5)^9$, die Matrix $A - 5\,E_9$ habe Rang 8. Wie sieht die Jordan'sche Normalform von A aus? (Nur Antwort).

9. Sei g die Ursprungsgerade im $\mathbb{R}^2$ durch den Punkt $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, sei σ die Spiegelung an dieser Geraden. Geben Sie **alle** Eigenvektoren von σ und die zugehörigen Eigenwerte an. (Nur Antwort, keine Begründung).

10. Sei $A \in M(2 \times 2, K)$. Beweise: Sind alle Vektoren $0 \neq v \in K^2$ Eigenvektoren, so ist A eine Skalarmatrix.

11. Beweise: Die Zuordnung $\eta\colon (K,+) \to \mathrm{GL}(2,K)$ mit

$$\eta(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ist ein Gruppen-Homomorphismus.

12. Sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Die Vektoren

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

seien Eigenvektoren von A. Gesucht ist ein Eigenvektor v_3 von A, sodass v_1, v_2, v_3 eine Basis ist. (Antwort, ohne Begründung).

13. Sei A eine hermitesche Matrix. Beweise: Das charakteristische Polynom χ_A hat reelle Koeffizienten.

14. Bestimmen Sie die Hauptachsen der Ellipse, die durch die Gleichung

$$5X^2 + 5Y^2 - 8XY = 1$$

gegeben ist. (Nur Antwort).

15. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

Bestimme, wenn möglich, einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$, mit $v^t A v < 0$. (Antwort mit Begründung).