## Wie findet man (schnell) eine Lösung?

**3.** Man sucht als erstes ein nicht-konstantes Polynom $q(T)$ mit von Null verschiedenem konstanten Koeffizienten, sodass $q(A) = 0$ gilt.

Zum Beispiel kann man $q = \chi_A$ nehmen: Wegen $\det A \neq 0$ ist der konstante Koeffizient von Null verschieden.

Oder man verwendet, dass es nicht triviale Linearkombinationen $\sum_{i=m}^{n} c_i A^i = 0$ mit $c_m \neq 0 \neq c_n$ und $m < n$ gibt und multipliziert mit $A^{-m}$, dann erhält man ebenfalls ein Polynom $q$ wie gewünscht.

**6.** Wegen $f^2 - f = 0$ ist das Minimalpolynom ein Teiler von $T^2 - T = T(T-1)$, also ist $f$ diagonalisierbar und die einzigen möglichen Eigenwerte sind $0$ und $1$.

**12.** Da $A$ eine symmetrische, reelle Matrix ist, gehört $v_3$ zu $L(v_1, v_2)^\perp$ (bezüglich des kanonischen inneren Produkts auf $\mathbb{R}^3$). Andererseits ist $L(v_1)^\perp = 0 \times \mathbb{R}^2$. Man sollte nun sofort sehen, dass $v_3 = [0, 2, -1]^t$ eine mögliche Lösung ist.

**15.** Bei dieser Aufgabe sollte man sofort an das Hauptminorenkriterium für positiv definite Matrizen denken.

## Bemerkungen zur Bewertung.

**3.** Wenn nicht ersichtlich war, an welcher Stelle die Voraussetzung, dass $A$ invertierbar ist, gebraucht wurde, gab es höchstens 1 Punkt.

**5.** Wenn zumindest $d = 7$ richtig bestimmt wurde gab es einen halben Trostpunkt.

**6.** Wenn nur Beispiele angegeben wurden (Nullmatrix, Einheitsmatrix), gab es einen halben Trostpunkt. Wenn zumindest notiert wurde, dass der Endomorphismus diagonalisierbar ist, gab es einen Punkt.

**7.** Multiple Choice: 3 richtige Antworten: 1 Punkt, 4 richtige Antworten: 2 Punkte

**8.** Die Lösung ist hier der Jordanblock $J(5,(9))$. Für alle anderen Antworten gab es 0 Punkte.

**9.** Das Wort **alle** war fett gedruckt: gemeint war also, wirklich alle Eigenvektoren, nicht nur eine Basis aus Eigenvektoren, anzugeben. Wurde nur eine Basis angegeben, gab es einen Punkt. Einige haben die Eigenräume angegeben, aber nicht alle Vektoren im Eigenraum sind Eigenvektoren, sondern nur die Vektoren ungleich Null. Auch dafür gab es nur einen Punkt. Wurden nur die beiden Eigenwerte angegeben, so gab es einen halben Punkt.

**10.** Wenn man voraussetzt, dass alle von Null verschiedenen Vektoren Eigenvektoren mit **gleichem** Eigenwert $\lambda$ sind, dann ist die Behauptung trivial: Der Bildvektor von $e_i$ ist

$\lambda e_i$, also ist $A = \lambda E_2$. Die Aufgabe bestand gerade darin zu zeigen, dass alle auftretenden Eigenwerte gleich sind!

**11.** Die Komposition in $\mathrm{GL}(2, K)$ ist die Produktbildung, nicht die Addition (die Summe zweier invertierbaren Matrizen muss nicht invertierbar sein). Wer also versuchte, mit der Addition auf $\mathrm{GL}(2, K)$ zu arbeiten, bekam keinen Punkt.

**13.** In der Vorlesung wurde gezeigt: Die Eigenwerte einer hermiteschen Matrix sind reell. In der Aufgabe ging es aber um die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms: Aufgabe war es, aus der Information über Eigenwerte eine solche über die Koeffizienten dieses Polynoms zu ziehen (im allgemeinen haben die Koeffizienten eines Polynoms $p$ recht wenig mit den Nullstellen von $p$ zu tun - so braucht ja $p$ gar keine Nullstellen zu haben).

Für den Beweis, dass alle Eigenwerte reell sind (ohne weiteren Hinweis, was dies mit der Fragestellung zu tun hat), gab es zumindest einen halben Trostpunkt.

Manche arbeiteten mit Linearkombinationen von Potenzen von A und wollten dann einen Koeffizientenvergleich durchführen - dies ist sicher nicht möglich, da zum Beispiel $A$ die Nullmatrix sein kann.