1. $L([1,1]^t) = \mathrm{Eig}(A,1)$.

2. Beweis: Sei $v \in \mathrm{Eig}(A,\lambda)$. Es ist

$$A(Bv) = (AB)v = (BA)v = B(Av) = B(\lambda v) = \lambda(Bv),$$

also $Bv \in \mathrm{Eig}(A,\lambda)$.

3. Beweis: Sei $\chi_A = \sum_{i=0}^n c_i T^i$ das charakteristische Polynom von A. Es ist $c_0 = (-1)^n \det A \neq 0$. Setze

$$p(T) = \sum_{i=1}^n \frac{-c_i}{c_0} T^{i-1}$$

Dann ist $p(A)A - E_n = \frac{-1}{c_0}\chi_A(A) = 0$ (Cayley-Hamilton), also $p(A) = A^{-1}$.

4. Zum Beispiel:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Durchführung des Verfahrens und Antwort:

$$\begin{aligned} 427 &= 1 \cdot 322 + 105 \\ 322 &= 3 \cdot 105 + 7 \\ 105 &= 15 \cdot 7. \end{aligned}$$

Also $d = 7$ und

$$7 = 322 - 3 \cdot 105 = 322 - 3 \cdot (427 - 322) = -3 \cdot 427 + 4 \cdot 322,$$

also $a = -3,\ b = 4$.

6.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

7. Alle Aussagen sind richtig.

8.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & & & \\ & 5 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 5 & 1 \\ & & & & 5 \end{bmatrix}$$

9. Die Vektoren in $L([1,2]^t) \setminus \{0\}$ sind die Eigenvektoren mit Eigenwert 1; die Vektoren in $L([2,-1]^t) \setminus \{0\}$ sind die Eigenvektoren mit Eigenwert -1;

10. Beweis: Sei v_1, v_2 eine Basis von A. Nach Voraussetzung sind dies Eigenvektoren, etwa mit Eigenwert λ_1, bzw λ_2. Auch $v_1 + v_2 \neq 0$, also Eigenvektor, etwa mit Eigenwert λ. Also

$$\lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2) = A(v_1 + v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2.$$

Da v_1, v_2 Basis ist, folgt $\lambda_1 = \lambda = \lambda_2$. Die Matrizendarstellung bezüglich dieser Basis ist also λE_2. Demnach ist A ähnlich zu λE_2, also gibt es eine invertierbare Matrix P mit $A = P^{-1}(\lambda E_n)P = \lambda E_n$.

11. Beweis: Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Es ist

$$\eta(\lambda_1 + \lambda_2) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \eta(\lambda_1)\eta(\lambda_2).$$

12. $[0,-2,1]^t$.

13. Beweis: Die Eigenwerte einer hermiteschen $(n \times n)$-Matrix sind reelle Zahlen, etwa $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, also ist

$$\chi_A(T) = \prod_{i=1}^{n} (T - \lambda_i)$$

ein Polynom mit reellen Koeffizienten.

14.

$$L([1,1]) \quad \text{und} \quad L([1,-1])$$

15. Antwort, mit Begründung: Nach dem Hauptminorenkriterium ist die Matrix positiv definit, denn die Hauptminoren sind

$$2, \quad 4 - 1 = 3, \quad \text{und} \quad \det A = 4 - 2 - 1 = 1,$$

also positiv. Demnach ist $v^t A v \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$.

Bei einzelnen Aufgaben gibt es natürlich auch andere Lösungen.
4. Hier gibt es eine Fülle möglicher Matrizen P.
10. Man kann explizit mit (2×2)-Matrizen arbeiten.
15. Man kann explizit zeigen, dass die Matrix positiv definit ist.