

Typische Klausuraufgaben 1: Kommentare

Zu den ODER-Aufgaben (Beweis oder Gegenbeispiel):

5. Es gibt solche Matrizen, zum Beispiel $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

16. Es gibt solche Polynome, zum Beispiel $(T^2 + 1)^3$.

19. **Alle** Aussagen sind falsch. (Man mache sich noch einmal klar: In der Mathematik genügt es, ein einziges Gegenbeispiel anzugeben, um zu zeigen, dass eine Aussage falsch ist.)

Welche Antworten werden in der Klausur erwartet? Hier drei Beispiele:

1. Der Eigenwert zu $v_1 + v_2$ sei λ . Angenommen, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Nach einem Satz, der in der Vorlesung bewiesen wurde, sind Eigenvektoren mit verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig, also sind v_1, v_2 linear unabhängig. Es ist

$$\lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2) = f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von v_1 und v_2 folgt $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$, also $\lambda_1 = \lambda_2$.

10. Es reicht, die Matrix

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b - a \end{bmatrix}$$

anzugeben.

[Wie findet man sie? Man sucht Eigenvektoren zu den Eigenwerten a und b . Natürlich ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert a . Und mit etwas Rechnen sieht man, dass zum Beispiel $\begin{bmatrix} 1 \\ b - a \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert b ist.]

21. Beweis. Sei $g \in G$ gegeben. Setze $g_1 = g$, und $g_2 = 1$. Dann ist $g^2 = g_1 g_2 g_1 g_2 = 1$. Multiplikation von links mit g^{-1} liefert $g = g^{-1} g^2 = g^{-1} \cdot 1 = g^{-1}$.