
Typische Klausuraufgaben 1: Weitere Kommentare 1

Zu 19 (2). Warum gibt es hier Gegenbeispiele? Ist $f(v) = \lambda v$, so gilt natürlich $f(2v) = \lambda \cdot (2v)$. Aus der Gleichheit $f(2v) = \lambda \cdot 2v$ folgt aber **nicht**, dass $2v$ ein Eigenvektor ist, denn Eigenvektoren sind **von Null verschiedene** Vektoren. Gegenbeispiele gibt es also, wenn der Grundkörper die Charakteristik 2 hat (und nur dort).

Zu 15. Ein Student schrieb: *Ist diese Frage nicht etwas zu speziell? Entweder weiß man das auswendig und kommt nach 10 Sekunden darauf, oder man kann lange überlegen* Dies ist in der Tat eine Wissensfrage, keine Rechenaufgabe. Es gibt spezielle Matrizen, mit denen man vertraut sein muss, wenn man mit den Methoden der linearen Algebra arbeiten will, wie etwa die Vandermonde'schen Matrizen oder eben die Begleitmatrizen. Auf die Idee, derartige Matrizen zu bilden, würde man selbst erst einmal nicht kommen, aber sobald man sie gesehen hat, sollten sie einem vertraut sein. Die Begleitmatrix kam nicht nur in den Übungsaufgaben vor, sie findet sich auch im Leitfaden (4.7.4). Dies sind also Dinge, die man wirklich auswendig kennen muss.

(Übrigens: hat man das System, nach dem die Begleitmatrix gebildet ist, durchschaut, so braucht man eigentlich doch nichts auswendig zu lernen: der i -te kanonische Basisvektor e_i geht auf den $(i+1)$ -ten, für $1 \leq i \leq n-1$, der n -te geht auf eine beliebige Linearkombination der Basisvektoren: diese Koeffizienten stehen also in der letzten Spalte. Da man auf diese Weise $A^n e_1$ als Linearkombination der Vektoren $A^i e_1$ mit $0 \leq i \leq n-1$ geschrieben hat, erhält man ein normiertes Polynom p vom Grad n mit $p(A)e_1 = 0$ (die Koeffizienten sind bis auf Vorzeichen gerade die Koeffizienten der Linearkombination). Die Theorie liefert nun das schöne Ergebnis, dass dieses Polynom p das charakteristische Polynom ist!)

Wie wichtig diese Fragestellung ist, sollte man der Tatsache entnehmen, dass mehrere Aufgaben diesen Zusammenhang thematisierten, so zum Beispiel die Übungsaufgaben 8.3 und 8.4. Es ist auch nicht überraschend, dass man selbst in der Wikipedia das Stichwort "Begleitmatrix" findet.

Hier zwei Musterlösungen.

11. Sei $f \in V$. Für $x \in \mathbb{R}$ setze

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \text{und} \quad h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Dann ist $g \in \text{Eig}(L, 1)$ und $h \in \text{Eig}(L, -1)$ und es ist $f = g + h$.

(Kommentar: Mehr braucht man nicht zu schreiben: die drei notwendigen Verifikationen sind trivial. Will man sie notieren, so könnte dies folgendermaßen aussehen:

$$L(g) = g, \quad \text{denn} \quad L(g)(r) = g(-r) = \frac{1}{2}(f(-r) + f(-(-r))) = \frac{1}{2}(f(-r) + f(r)) = g(r),$$

also $g \in \text{Eig}(L; 1)$, und entsprechend

$$L(g) = -h, \quad \text{denn} \quad L(h)(r) = h(-r) = \frac{1}{2}(f(-r) - f(-(-r))) = \frac{1}{2}(f(-r) - f(r)) = -h(r),$$

also $h \in \text{Eig}(L; -1)$. Schließlich ist

$$(g + h)(r) = \frac{1}{2}(f(r) + f(-r)) + \frac{1}{2}(f(r) - f(-r)) = \frac{2}{2}f(r) = f(r),$$

also $f = g + h$. Aber, wie gesagt, das sind ja offensichtliche Rechnungen.)

20. Die Aussage ist richtig. Hier der Beweis: Sei $u \in U_1 \cap (U_2 \oplus U_3)$, also $u \in U_1$ und $u = u_2 + u_3$ mit Elementen $u_2 \in U_2$, $u_3 \in U_3$. Es ist $u - u_2 = u_3$, dies ist ein Element, das zu $U_1 + U_2$ und auch zu U_3 gehört. Wegen $(U_1 + U_2) \cap U_3 = 0$ ist $u - u_2 = 0$. Aber $u = u_2$ gehört zu $U_1 \cap U_2 = 0$, demnach ist $u = 0$.