

## Typische Klausuraufgaben 4: Kommentare

Zu den ODER-Aufgaben (Beweis oder Gegenbeispiel): Aussage **13** ist falsch, Aussage **14** ist richtig.

**19.** Alle Aussagen sind falsch.

**7.** Siehe Aufgabe 13 des 3.Klausurzettels.

**9.** Beispiel:  $X^2 + Y^2 - 2XY + 2X$ .

Wie kommt man darauf? Man beginnt mit einer Parabel, zum Beispiel  $V(Y - X^2)$  und dreht sie ...

Noch einfacher ist es, eine symmetrische  $(3 \times 3)$ -Matrix  $A'$  zu nehmen, sodass für  $A'$  und den rechten unteren  $(2 \times 2)$ -Block  $A$  gilt: Der Rang von  $A$  ist 1, der Rang von  $A'$  ist 3, und  $[1 \ 1]^t$  ist Eigenvektor von  $A$ , also zum Beispiel eben

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

---

## Zwei Musterlösungen

**2.** Die Spalten einer Permutationsmatrix entstehen aus der kanonischen Basis des  $\mathbb{R}^n$  durch Vertauschungen, bilden also eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^n$ .

**8.** Sei  $A^t = -\overline{A} \in M(n \times n, \mathbb{C})$ , sei  $v$  Eigenvektor zu  $A$  mit Eigenwert  $\lambda$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \lambda(v^t \overline{v}) &= (\lambda v)^t \overline{v} = (Av)^t \overline{v} = (v^t A^t) \overline{v} = v^t (A^t \overline{v}) = v^t (-\overline{A} \overline{v}) \\ &= -v^t (\overline{A} \overline{v}) = -v^t \overline{\lambda v} = -v^t \overline{\lambda} \overline{v} = -\overline{\lambda} (v^t \overline{v}). \end{aligned}$$

Wegen  $v \neq 0$  ist  $v^t \overline{v} \neq 0$ , also ist  $\lambda = -\overline{\lambda}$  und demnach  $\lambda$  rein-imaginär.