Typische Klausuraufgaben 5: Kommentare

6. Alle Aussagen sind richtig.

12. Alle Aussagen sind falsch.

13. Die Aussagen (1) und (2) sind falsch, die Aussagen (3) und (4) richtig.

14. In der Aufgabe 5.3 war zu zeigen, dass der Unterring der reellen (2×2)-Matrizen der Form

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

ein Körper ist, und zwar ein Körper, der isomorph zum Körper der komplexen Zahlen ist. Hier nun wird der Unterring der komplexen Zahlen $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ thematisiert. Man muss also nur wissen, wie man für die komplexe Zahl $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ die komplexe Zahl $1/z$ berechnet.

Es gibt auch einen ganz elementaren Zugang: wir arbeiten mit einem Ring von (2×2)-Matrizen. Wir wollen ein Ring-Element invertieren — also eine Matrix invertieren: Man kennt aus LAI die Regel: eine Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$. Die von Null verschiedenen Elemente in L sind also invertierbar ($\det A = a^2 + b^2$), und wir können die inverse Matrix sofort hinschreiben (z.B. mit Hilfe der Adjunkte; bei einer (2×2)-Matrix ist dies einfach). Zu überprüfen ist nur noch, ob diese inverse Matrix wieder zu L gehört, aber dies ist der Fall.

Eine Musterlösung

15. Seien $A, B \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ Matrizen, die Spiegelungen an Ursprungsgeraden beschreiben. Die Matrizen A, B sind orthogonal mit $\det A = -1 = \det B$. Also ist AB orthogonal mit $\det AB = 1$, demnach beschreibt AB eine Drehung.