Nachtrag zur allgemeinen Vektorraum-Theorie.

1.5.15. Direkte Summen. Sei V ein Vektorraum, seien $U_1, \ldots, U_t$ Unterräume, wir schreiben
$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_t = \bigoplus_{i=1}^{t} U_i$$
falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind: Erstens ist $V = \sum_i U_i$, zweitens gilt: Sind Elemente $u_i \in U_i$ gegeben mit $\sum u_i = 0$, so gilt $u_i = 0$ für alle i. In diesem Fall sagt man, dass V die *direkte Summe der Unterräume* U_i ist. Genau dann gilt $V = \bigoplus_{i=1}^{t} U_i$, wenn sich jedes Element $v \in V$ eindeutig in der Form $v = \sum u_i$ mit $u_i \in U_i$ schreiben lässt.

Bemerkungen: (1) Auf die Reihenfolge der U_i kommt es offensichtlich nicht an!

(2) Im Fall $t = 2$ kann man die zweite Bedingung umschreiben zu $U_1 \cap U_2 = 0$. (Gilt nämlich die zweite Bedingung und ist $u \in U_1 \cap U_2$, so betrachte die Summe $u + (-u) = 0$; die zweite Bedingung liefert $u = 0$. Umgekehrt sei $U_1 \cap U_2 = 0$. Sind $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ gegeben mit $u_1 + u_2 = 0$, so ist $u_1 = -u_2 \in U_1 \cap U_2 = 0$, also sind beide Elemente gleich Null.)

(3) Ist $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_t$ und $1 \leq s < t$, so kann man auch Klammern setzen:

$$(*) \qquad V = (U_1 \oplus \cdots \oplus U_s) \oplus (U_{s+1} \oplus \cdots \oplus U_t).$$

Beweis: Die Summenaussage ist klar, sind nun Elemente $u \in (U_1 \oplus \cdots \oplus U_s)$ und $u' \in (U_{s+1} \oplus \cdots \oplus U_t)$ gegeben mit $u + u' = 0$, so schreibe $u = \sum_{i=1}^{s} u_i$, und $u' = \sum_{i=s+1}^{t} u_i$, dann folgt: alle $u_i = 0$, also auch $u = 0, u' = 0$.

Umgekehrt folgt aus $(*)$, dass $V = \bigoplus_{i=1}^{t} U_i$ gilt. Beweis: Wieder ist die Summenaussage klar. Um die zweite Bedingung zu zeigen, betrachte $u_i \in U_i$ mit $\sum u_i = 0$. Das mittlere $\oplus$-Zeichen liefert $\sum_{i=1}^{s} u_i = 0$ und $\sum_{i=s+1}^{t} = 0$, die weiteren Zeichen $\oplus$ liefern dann, dass einerseits $u_1 = \cdots = u_s = 0$, andererseits $u_{s+1} = \cdots = u_t = 0$ gilt.

(4) Ist $V = \bigoplus_{i=1}^{t} U_i$ und ist $u_{i1}, \ldots, u_{i,n_i}$ eine Basis von U_i, so ist die Folge $u_{i1}, \ldots, u_{t,n_t}$ eine Basis von V. Beweis: Klar ist, dass dies ein Erzeugendensystem ist. Gilt nun für eine Linearkombination $\sum_{ij} \lambda_{ij} u_{ij} = 0$, so liegt das Element $u_i = \sum_j \lambda_{ij} u_{ij}$ in U_i, das direkte Summenzeichen impliziert demnach $u_i = 0$, für jedes i. Da aber die u_{ij} mit festem ersten Index einen Basis von U_i bilden, folgt $\lambda_{ij} = 0$ (für dieses i and alle j, also für alle i, j).

Es gilt also: Ist $V = \bigoplus_{i=1}^{t} U_i$ mit endlich-dimensionalen Unterräumen U_i, so ist $\dim V = \sum \dim U_i$.

(5) Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Genau dann ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, wenn alle v_i von Null verschieden sind und $V = Kv_1 \oplus \cdots \oplus Kv_n$ gilt.

Allgemeiner: Seien U_i Unterräume eines Vektorraums V mit $i \in I$ (dabei sei I eine Menge, man nennt sie die Indexmenge). Dann schreibt man
$$V = \bigoplus_{i \in I} U_i,$$

falls sich jedes Element $v \in V$ eindeutig als (endliche!) Linearkombination $v = \sum_i u_i$ mit $u_i \in U_i$ schreiben lässt. (Dabei versteht man unter einer endlichen Linearkombination $\sum_i u_i$ eine derartige Summe, bei der höchstens endlich viele der Elemente u_i von Null verschieden sind - Warnung: in der Analysis werden auch Reihen betrachtet: also Summierungen mit unendlich vielen von Null verschiedenen Summanden; dies wird in der reinen Algebra nie getan, es gibt aber eine mathematische Theorie "topologische Algebra"...).

4. Eigenvektoren, Eigenwerte.

4.1. Definition, Beispiele, elementare Eigenschaften.

4.1.1. Sei V ein K-Vektorraum, sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Sei $\lambda \in K$. Ein Vektor $v \neq 0$ in V heißt *Eigenvektor zu f mit Eigenwert λ* falls gilt

$$f(v) = \lambda \cdot v.$$

Also: v wird unter f auf ein Vielfaches von sich abgebildet. Nach Voraussetzung sind Eigenvektoren immer von Null verschieden (dagegen darf $\lambda = 0$ sein; Eigenvektoren mit Eigenwert 0 sind gerade alle von 0 verschiedene Vektoren im Kern von f).

Definition für Matrizen. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Ist $x \in K^n$ von Null verschieden, und gilt $Ax = \lambda x$, für ein $\lambda \in K$, so nennt man x einen Eigenvektor zur Matrix A mit Eigenwert λ. Beachte: Wegen $x \neq 0$ ist λ eindeutig bestimmt.

4.1.2. (a) *Ist x Eigenvektor zur Matrix A mit Eigenwert λ, so ist x auch Eigenvektor zur Abbildung l_A mit Eigenwert λ.*

(b) *Ist v Eigenvektor zu $f\colon V \to V$ mit Eigenwert λ und Basis $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, so ist $x = \Phi^{-1}v$ Eigenvektor der Matrix $A = M(f)$ mit Eigenwert λ* (hier ist $\Phi = \Phi_{v_1,\ldots,v_n}$ und $M = M^{v_1,\ldots,v_n}_{v_1,\ldots,v_n}$.

Beweis von (a). Es ist

$$Ax = l_A(x) = \lambda x.$$

Beweis von (b). Vorausgesetzt wird: $f(v) = \lambda v$. Zu zeigen ist $Ax = \lambda x$. Wende Φ auf Ax an und verwende das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\ f\ } & V \\ {\scriptstyle\Phi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\Phi} \\ K^n & \xrightarrow[l_A]{} & K^n \end{array}$$

Es ist

$$\Phi(Ax) = (\Phi \cdot l_A)x = (f \cdot \Phi)x = f(\Phi(x)) = f(v) = \lambda v = \lambda(\Phi(x)) = \Phi(\lambda x).$$

Nun ist Φ injektiv, also $Ax = \lambda x$.

4.1.3. Beispiele:

(1) Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ hat $(1,0)$ als Eigenvektor mit Eigenwert 2 und $(0,1)$ als Eigenvektor mit Eigenwert 3.

Allgemeiner gilt: *Ist A eine Diagonalmatrix, so sind die Vektoren* $(0,\dots,0,1,0,\dots,0) \in K^n$ *Eigenvektoren.*

(2) Die Matrix $A \in M(2\times 2,\mathbb{R})$ beschreibe eine Drehung θ um den Ursprung. *Genau dann besitzt A Eigenvektoren, wenn θ eine Drehung um 0° oder um 180° ist* (in beiden Fällen ist jeder von Null verschiedene Vektor ein Eigenvektor, und zwar mit Eigenwert 1 bzw. -1.

(3) *Beschreibt $A \in M(2\times 2,\mathbb{R})$ eine Spiegelung, so hat A Eigenwerte* 1 *und* -1.

(4) Beispiele von Eigenvektoren bezüglich des Differenzierens: Konstante Funktionen; Exponentialfunktionen der Form $e^{\lambda t}$.

(5) *Nilpotente Matrizen haben höchstens den Eigenwert* 0 (eine quadratische Matrix A heißt *nilpotent*, wenn $A^s = 0$ für eine natürliche Zahl s gilt).

Beweis: Sei $Ax = \lambda x$ mit $x \neq 0$. Dann ist $A^s x = \lambda^s x$ (Beweis mit Induktion), ist also $A^s = 0$, so ist $\lambda^s x = 0$, demnach $\lambda^s = 0$, demnach $\lambda = 0$.

Bsp: Sei $A = (a_{ij})$ eine Matrix mit $a_{ij} = 0$ für alle $i \geq j$. Dann ist A nilpotent (Übungsaufgabe) und der Vektor $(1,0,\dots,0)$ ist Eigenvektor.

4.1.4. (a) *Ist v Eigenvektor mit Eigenwert λ, und ist $\gamma \in K\setminus\{0\}$, so ist γv ebenfalls Eigenvektor mit Eigenwert λ.*

(b) *Sind v, v' Eigenvektoren mit* **gleichem** *Eigenwert λ, und ist $v + v' \neq 0$, so ist $v + v'$ Eigenvektor mit Eigenwert λ.*

Definition: Eigenraum. Sei $f\colon V \to V$ Endomorphismus eines K-Vektorraums. Ist $\lambda \in K$, so sei $\operatorname{Eig}(f;\lambda)$ die Menge der Vektoren $v \in V$ mit $f(v) = \lambda v$. Man nennt dies den *Eigenraum zu f und λ*. Die von Null verschiedenen Elemente in $\operatorname{Eig}(f;\lambda)$ sind gerade die Eigenvektoren zu f mit Eigenwert λ. Und es gilt: Genau dann ist λ Eigenwert zu f, wenn $\operatorname{Eig}(f;\lambda) \neq 0$ gilt.

(c) (Umformulierung von (a) und (b)): *Für $\lambda \in K$ ist* $\operatorname{Eig}(f;\lambda)$ *Unterraum von V.*

4.1.5. Es gilt

$$\operatorname{Eig}(f;\lambda) = \operatorname{Kern}(f - \lambda 1_V) = \operatorname{Kern}(\lambda 1_V - f).$$

insbesondere ist

$$\operatorname{Eig}(f;0) = \operatorname{Kern}(f).$$

(Wir schreiben 1_V statt id_V; es handelt sich hier um das Einselement im Ring $\operatorname{End}(V)$, also sollte man eigentlich $1_{\operatorname{End}(V)}$ schreiben.)

Also: Das Berechnen von Eigenräumen zu einem vorgegebenen λ ist einfach. Aber: wie findet man die möglichen Eigenwerte? Später!

4.2. Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren.

4.2.1 Satz. *Eigenvektoren mit paarweise verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.*

Beweis: Sei v_i ein Eigenvektor mit Eigenwert λ_i, mit $1 \le i \le t$. Seien die Elemente $\lambda_i \in K$ paarweise verschieden. Sei $\sum_{i=1}^t \mu_i v_i = 0$. Zu zeigen: $\mu_i = 0$ für alle i. Wir führen Induktion nach t. Induktionsanfang: Ist $t = 1$, so ist $\mu_1 = 0$.

Induktionsschritt. Sei $t \ge 2$. Sei also $0 = \sum_{i=1}^t \mu_i v_i$ gegeben. Wende auf diese Gleichung den Endomorphismus f an, wir erhalten

$$0 = f(0) = f(\sum_{i=1}^t \mu_i v_i) = \sum_{i=1}^t \mu_i f(v_i) = \sum_{i=1}^t \mu_i \lambda_i v_i.$$

Andererseits multiplizieren wir die Ausgangsgleichung mit λ_t. Wegen $0 = \sum_{i=1}^t \mu_i v_i$ gilt auch $0 = \sum_{i=1}^t \mu_i \lambda_t v_i$, also

$$0 = \sum_{i=1}^t \mu_i(\lambda_i - \lambda_t)v_i$$

Dies ist aber eine Linearkombination der $t-1$ Eigenvektoren $v_1, \dots, v_{t-1}$, denn der Koeffizient von v_t ist Null. Also folgt nach Induktion

$$\mu_i(\lambda_i - \lambda_t) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \le i < t.$$

Für diese i gilt aber $\lambda_i \ne \lambda_t$, also folgt $\mu_i = 0$ für $1 \le i < t$. Also ist

$$\mu_t v_t = \sum\nolimits_{i=1}^t \mu_i v_i = 0,$$

und wegen $v_t \ne 0$ folgt $\mu_t = 0$. Demnach gilt $\mu_i = 0$ für alle $1 \le i \le t$.

Anwendung: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ paarweise verschiedene reelle Zahlen, so sind die Funktionen $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ linear unabhängig. Hinweis: Dies ist ein ganz übliches Verfahren, um die lineare Unabhängigkeit von Funktionen zu beweisen: man nimmt einen Funktionenraum $\mathcal{F}$, in dem diese Funktionen liegen, und sucht einen "Operator" $D\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, also einen Endomorphismus von $\mathcal{F}$, so dass die gegebenen Funktionen Eigenvektoren mit paarweise verschiedenen Eigenwerten sind.

Folgerung. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum. Jeder Endomorphismus $f\colon V \to V$ besitzt höchstens n Eigenwerte.*

Matrix-Formulierung: *Eine $(n \times n)$-Matrix hat höchstens n Eigenwerte.*

4.2.2. Zweite Version des Satzes. *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Es ist*

$$\sum\nolimits_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f;\lambda) = \bigoplus\nolimits_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f;\lambda),$$

Insbesondere ist
$$\sum_\lambda \dim \operatorname{Eig}(f;\lambda) \leq \dim V$$
(denn die linke Seite ist die Dimension des Unterraums, der von den Eigenvektoren erzeugt wird).

Wir kennen Beispiele von (2×2)-Matrizen ohne Eigenvektoren (die meisten Drehungen) und solche mit einem einzigen Eigenwert, sodass der zugehörige Eigenraum eindimensional ist (nämlich l_A mit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$). Wir sehen also, dass
$$\sum\nolimits_\lambda \dim \operatorname{Eig}(f;\lambda) = \dim V$$
nicht immer gilt!

Beweis des Satzes: Um die Summenbedingung brauchen wir uns nicht zu kümmern. Gegeben seien also $u_\lambda \in \operatorname{Eig}(f,\lambda)$ mit paarweise verschiedenen λ und es sei $\sum u_\lambda = 0$. Da Eigenvektoren mit paarweise verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, muss jeweils $u_\lambda = 0$ sein.

Üblicherweise werden wir uns auf endlich-dimensionale Vektorräume V beschränken, dann ist eine direkte Summe der Form $\bigoplus_{\lambda\in K} \operatorname{Eig}(f;\lambda)$ im wesentlichen eine endliche direkte Summe: nur endlich viele dieser Unterräume sind von Null verschieden. Hier nun ein Beispiel einer unendlichen direkten Summe: Sei $\mathcal{F}$ der Unterraum von $C^\infty(\mathbb{R})$, der von den Funktionen der Form $e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ aufgespannt wird, Dann gilt für den Operator D mit $D(f) = f'$:
$$\mathcal{F} = \bigoplus\nolimits_{\lambda\in K} \operatorname{Eig}(D;\lambda), \quad \text{mit} \quad \operatorname{Eig}(D;\lambda) = \mathbb{R}e^{\lambda t}.$$
Die Funktionen $e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ bilden also eine Basis von $\mathcal{F}$.

4.3. Diagonalisierbare Matrizen.

Zwei Matrizen $A, B \in M(n\times n, K)$ heißen *ähnlich,* wenn es eine invertierbare Matrix P mit $P^{-1}AP = B$ gibt. Beachte: *Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation.* Also

(i) A ist ähnlich zu A. Beweis: Nimm $P = E_n$

(ii) Ist A ähnlich zu B, so ist B ähnlich zu A. Beweis: Ist $P^{-1}AP = B$, so ist $A = PBP^{-1} = Q^{-1}BQ$ mit $Q = P^{-1}$.

(iii) Ist A ähnlich zu B, und B ähnlich zu C, so ist A ähnlich zu C. Beweis: Ist $P^{-1}AP = B$ und $Q^{-1}BQ = C$. und setzt man $R = PQ$, so ist $R^{-1}AR = (PQ)^{-1}APQ = Q^{-1}P^{-1}APQ = Q^{-1}BQ = C$.

Eine $n\times n$-Matrix A heißt *diagonalisierbar,* falls A zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist (falls es also eine invertierbare Matrix P gibt, so daß $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist).

Satz. *Sei A eine $(n\times n)$-Matrix. Genau dann ist A diagonalisierbar, wenn es in K^n eine Basis von Eigenvektoren zu $f_A\colon K^n \to K^n$ gibt; also genau dann, wenn $\sum \dim \operatorname{Eig}(A;\lambda) = n$ gilt.*

Beweis (und gleichzeitig Regel zur Bestimmung von P): Sei $(v_1,\dots,v_n)$ eine Basis aus Eigenvektoren, sei λ_i der Eigenwert zu v_i. Bilde die $(n\times n)$-Matrix P, deren j-te Spalte gerade v_j ist. Wegen $Av_j=\lambda_j v_j$ entsteht also AP aus P, indem die j-te Spalte von P mit dem Skalar λ_i multipliziert wird. Ist demnach D die Diagonalmatrix mit Diagonalkoeffizienten $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, so ist $AP=PD$. Nun ist P invertierbar, also $P^{-1}AP=D$.

Umgekehrt gilt: Ist $P^{-1}AP=D=(d_{ij})_{ij}$ eine Diagonalmatrix, so ist die i-te Spalte von A ein Eigenvektor für A mit Eigenwert d_{ii}. (Denn $AP=PD$ und diese Matrix entsteht aus P, in dem die i-te Spalte von P mit d_{ii} multipliziert wird. Ist also v_i die i-te Spalte von P, so ist $f_A(v_i)=d_{ii}v_i$.)

Zweite Formulierung. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, sei $f\colon V\to V$ ein Endomorphismus. Genau dann gibt es eine Basis aus Eigenvektoren zu f, wenn f durch eine Diagonalmatrix darstellbar ist.*

Zur Erinnerung 1: Eine $(n\times n)$-Matrix besitzt höchstens n Eigenwerte. *Besitzt sie n Eigenwerte, so ist sie diagonalisierbar.* Beweis: Sind $(v_1,\dots,v_t)$ Eigenvektoren zu A mit paarweise verschiedenen Eigenwerten, so ist diese Folge linear unabhängig, also $t\le n$. Ist $t=n$, so ist dies eine Basis aus Eigenvektoren.

Zur Erinnerung 2: Sei A eine $(n\times n)$-Matrix. Es ist $\sum_{\lambda\in K}\dim \mathrm{Eig}(A,\lambda)\le n$. *Gleichheit gilt genau dann, wenn A diagonalisierbar ist.* Beweis: Sei $n(\lambda)=\dim\mathrm{Eig}(A,\lambda)$. Ist $\sum_{\lambda\in K}n(\lambda)=n$, so haben wir eine Basis aus Eigenvektoren konstruiert. Umgekehrt: Ist A eine Diagonalmatrix, so gibt es eine Basis $(v_1,\dots,v_n)$ aus Eigenvektoren. Ist $m(\lambda)$ die Anzahl der Vektoren v_i mit Eigenvektor λ, so ist also $\sum_\lambda m(\lambda)=n$. Andererseits ist $m(\lambda)\le n(\lambda)$. Insgesamt sehen wir:

$$n=\sum_\lambda m(\lambda)\le\sum_\lambda n(\lambda)\le n,$$

und demnach gilt überall das Gleichheitszeichen (und es ist auch $m(\lambda)=n(\lambda)$ für alle λ).

Beispiel. Betrachte die Matrix

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\-2&3&2\\0&0&3\end{bmatrix},$$

sie hat die Eigenwerte $1,2,3$ (wie man das feststellt, werden wir heute sehen), und offensichtlich gilt:

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad A\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\0\end{bmatrix},\quad A\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\\3\end{bmatrix}.$$

Setzen wir also

$$P=A\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\0&0&1\end{bmatrix},$$

so gilt

$$P^{-1}AP = P = A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

4.4. Die Eigenwerte einer Matrix A und das charakteristische Polynom χ_A von A.

Sei $A \in M(n \times n, K)$. Genau dann ist $\lambda \in K$ Eigenwert von A, wenn $A - \lambda I$ nicht invertierbar ist.

Satz. *Genau dann ist λ Eigenwert für A, wenn $\det(\lambda E_n - A) = 0$ gilt.*

Beweis: Sei $\lambda \in K$. Es ist $v \in \mathrm{Eig}(A, \lambda)$ genau dann, wenn $Av = \lambda v$ gilt, also genau dann, wenn $(\lambda E_n - A)v = 0$ gilt. Wir sehen also: Genau dann gibt es einen Eigenvektor zu A mit Eigenwert λ, wenn die Matrix $\lambda E_n - A$ singulär ist, wenn also $\det(\lambda E_n - A) = 0$ gilt.

Ist $A \in M(n \times n, K)$, so nennt man

$$\chi_A = \det(TE_n - A)$$

das *charakteristische Polynom* der Matrix A.

Nullstellen von Polynomen. Sei $f \in K[T]$ ein von Null verschiedenes Polynom. Sei $\lambda \in K$. Man nennt λ eine *Nullstelle* von f, falls $f(\lambda) = 0$ gilt.

Satz. *Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A einer Matrix A sind gerade die Eigenwerte von l_A.*

Beweis: Sei $\lambda \in K$. Es ist $\chi_A(\lambda) = 0$ genau dann, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$ gilt, genau dann, wenn $A - \lambda I$ nicht invertierbar ist, also genau dann, wenn $\mathrm{Ker}(f_{A-\lambda I}) \neq 0$ gilt.

Beispiel. Betrachte die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det \begin{bmatrix} T & -1 & -1 \\ 2 & T-3 & -2 \\ 0 & 0 & T-3 \end{bmatrix} \\ &= T(T-3)^2 + 2(T-3) = (T-3)(T^2 - 3T + 2) = (T-3)(T-2)(T-1), \end{aligned}$$

also sind $1, 2, 3$ Eigenwerte.

Lemma. *Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom.*

Beweis: Seien A, B ähnliche $(n \times n)$-Matrizen. Es gibt also eine invertierbare Matrix P mit $B = P^{-1}AP$. Wegen $T \cdot E_n = P^{-1}(T \cdot E_n)P$ gilt

$$T \cdot E_n - B = P^{-1}(T \cdot E_n)P - P^{-1}AP = P^{-1}(T \cdot E_n - A)P.$$

Der Determinanten-Multiplikationssatz liefert:

$$\begin{aligned}\chi_B &= \det(T \cdot E_n - B) = \det P^{-1}(T \cdot E_n - A)P \\ &= \det P^{-1} \cdot \det(T \cdot E_n - A) \cdot \det P = (\det P)^{-1} \cdot \chi_A \cdot \det P = \chi_A.\end{aligned}$$

Ist $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums und $\mathcal{A}$ eine Basis von V, so hängt das charakteristische Polynom von $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ nur von f nicht aber von der ausgewählten Basis $\mathcal{A}$ ab, man nennt es deshalb auch das *charakteristische Polynom von* f.

Wie findet man Eigenwerte und Eigenvektoren? Sei $f\colon V \to V$ Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums.
(0) Wähle eine Basis $\mathcal{A}$ und berechne die Matrizendarstellung $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$.
(1) Berechne das charakteristische Polynom χ_A der Matrix A.
(2) Berechne die Nullstellen von χ_A.
(3) Ist λ eine Nullstelle, berechne eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$.