

Einschub (Nachtrag zur LA I): Komplementärbasen.

Sei V ein Vektorraum, U ein Unterraum. Eine Folge $(v_1, \dots, v_t)$ von Vektoren aus V heißt *linear unabhängig modulo U* , falls folgendes gilt: sind p_i Skalare in K und ist $\sum_{i=1}^t p_i v_i \in U$, so sind alle $p_i = 0$. Die Folge $(v_1, \dots, v_t)$ von Vektoren aus V heißt *Komplementärbasis zu U in V* , falls erstens die Folge $(v_1, \dots, v_t)$ linear unabhängig modulo U ist, und zweitens U zusammen mit den Vektoren $v_1, \dots, v_t$ den Vektorraum V erzeugt.

(1) Die Folge $(v_1, \dots, v_t)$ ist genau dann linear unabhängig modulo U , wenn erstens diese Folge linear unabhängig ist und zweitens $U \cap L(v_1, \dots, v_t) = 0$ gilt.

(2) Die Folge $(v_1, \dots, v_t)$ ist genau dann eine Komplementärbasis zu U in V , wenn erstens diese Folge linear unabhängig ist, und zweitens $U \oplus L(v_1, \dots, v_t) = V$ gilt.

(3) Sei $(u_1, \dots, u_s)$ eine Basis von U . Die Folge $(v_1, \dots, v_t)$ ist genau dann eine Komplementärbasis zu U in V , wenn $(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_t)$ eine Basis von V ist.

(4) Sei V endlich-dimensional. Sei U ein Unterraum von V . Eine Folge von Vektoren in V , die linear unabhängig modulo U ist, lässt sich zu einer Komplementärbasis zu U in V ergänzen.

(5) Sei V endlich-dimensional. Ist $(v_1, \dots, v_t)$ eine Folge in V , die linear unabhängig modulo U ist, so ist

$$t \leq \dim V - \dim U.$$

Ist $(v_1, \dots, v_t)$ eine Komplementärbasis zu U in V , so ist

$$t = \dim V - \dim U.$$

Sind Unterräume V_i ($0 \leq i \leq m$) von V gegeben und gilt

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_{m-1} \subseteq V_m = V,$$

so nennt man dies eine *Kette* von Unterräumen.

(6) Ist eine Kette

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_{m-1} \subseteq V_m = V$$

von Unterräumen gegeben, und sind $(v_{i,1}, \dots, v_{i,n_i})$ Folgen von Vektoren in V_i , so gilt: Ist $(v_{i,1}, \dots, v_{i,n_i})$ eine Komplementärbasis zu V_{i-1} in V_i , für $1 \leq i \leq m$, so ist die Folge

$$(v_{1,1}, \dots, v_{1,n_1}, v_{2,1}, \dots, v_{2,n_2}, \dots, v_{m,1}, \dots, v_{m,n_m})$$

eine Basis von V ist.

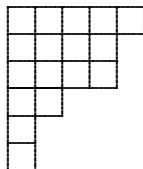
Zusatz. Wir haben hier vermieden, den Begriff des Quotientenraums zu verwenden. Natürlich gilt: Ist U ein Unterraum von V , und ist $\pi: V \rightarrow V/U$ die kanonische Abbildung von V auf den Quotientenraum V/U , so sind die Elemente $v_1, \dots, v_t \in V$ genau dann linear unabhängig modulo U , wenn $\pi(v_1), \dots, \pi(v_t)$ linear unabhängig in V/U sind. Und $v_1, \dots, v_t \in V$ ist genau dann eine Komplementärbasis zu U in V , wenn $\pi(v_1), \dots, \pi(v_t)$ eine Basis von V/U ist.

4.8. Nilpotente Matrizen, nilpotente Endomorphismen.

4.8.1. Partitionen und Young-Diagramme.

Partition. Sei n eine natürliche Zahl. Eine *Partition* von n ist eine Folge $p = (p_1, \dots, p_t)$ von natürlichen Zahlen p_i , so dass gilt $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_t \geq 1$ und $\sum_i p_i = n$. (Manchmal ist es sinnvoll, die Folge $p_1, \dots, p_t$ durch Nullen fortzusetzen, also $p_i = 0$ für $i > t$ zu schreiben.)

Young-Diagramm. Jeder Partition ordnet man ein sogenanntes Young-Diagramm zu: man betrachtet ein Kästchenmuster mit t Kästchenreihen, linksbündig untereinander gesetzt, wobei die i -te Reihe aus p_i Kästchen besteht. Analog zur Indizierung der Positionen in einer Matrix kann man diese Kästchen durch die Paare (i, j) mit $1 \leq j \leq p_i$ und $1 \leq i \leq t$ indizieren, wie setzen also $Y(p) = \{(i, j) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1 \mid 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq p_i\}$ und nennt dies das *Young-Diagramm* zu p . Beispiel: Das Young-Diagramm zur Partition $p = (5, 4, 4, 2, 1, 1)$ hat die Form



Noch einmal: Ein Young-Diagramm Y ist also eine endliche Teilmenge $Y \subset \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1$ mit folgenden beiden Eigenschaften:

- (a) Ist $(i, j) \in Y$ und $i > 1$, so ist $(i - 1, j) \in Y$.
- (b) Ist $(i, j) \in Y$ und $j > 1$, so ist $(i, j - 1) \in Y$.

Ist Y ein Young-Diagramm, und ist p_i die Anzahl der Zahlen j mit $(i, j) \in Y$, so ist $p = (p_1, p_2, \dots)$ eine Partition und es ist $Y = Y(p)$.

Duale Partition. Ist Y ein Young-Diagramm, so ist $Y' = \{(j, i) \mid (i, j) \in Y\}$ ebenfalls ein Young-Diagramm, man nennt es das *duale Young-Diagramm*. Ist p die Partition mit $Y = Y(p)$, und $Y' = Y(p')$, so nennt man p' die zu p *duale* Partition. Ist p eine Partition, so kann man p' wie folgt bestimmen: Es ist $p'_j = |\{i \mid p_i \geq j\}|$ (denn dies ist im Young-Diagramm gerade die Anzahl der Kästchen in der j -ten Spalte). Mit p ist auch p' eine Partition von n und es gilt $(p')' = p$.

Beispiel: Die zu $p = (5, 4, 4, 2, 1, 1)$ duale Partition ist $p' = (6, 4, 3, 3, 1)$.



Links ist gestrichelt eine Gerade eingezeichnet: man erhält das Young-Diagramm von p' aus dem Young-Diagramm von p durch Spiegelung an dieser Geraden.

Man nennt eine Partition p *selbst-dual*, wenn $p' = p$ gilt. Zum Beispiel ist $p = (3, 1, 1)$ selbst-duale Partition.

Ist Y ein Young-Diagramm, so wollen wir die Kästchen durchnummerieren, und zwar zeilenweise, von links nach rechts, und von oben nach unten:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)		1	2	3	4	5
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)			6	7	8	9	
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)			10	11	12	13	
(4,1)	(4,2)					14	15			
(5,1)						16				
(6,1)						17				

jeder Position (i, j) haben wir auf diese Weise eine Zahl $\nu(i, j)$ zugeordnet, ν ist eine Bijektion zwischen der Menge $\{(i, j) \mid 1 \leq j \leq p_i, 1 \leq i \leq t\}$ und $\{1, 2, \dots, n\}$. Natürlich können wir ν durch eine Formel festlegen: es ist $\nu(i, j) = j + \sum_{r < i} p_r$.

4.8.2. Der nilpotente Endomorphismus f_p zur Partition p .

Jeder Partition p von n ordnet man einen Endomorphismus $f_p: K^n \rightarrow K^n$ wie folgt zu. Man benennt die kanonischen Basisvektoren $e_1, \dots, e_n$ um, und zwar setzt man $e_{ij} = e_{ij}^{(p)} = e_{\nu(ij)}$. Setze

$$f_p(e_{ij}) = \begin{cases} e_{i,j-1} & j > 1, \\ 0 & \text{falls } j = 1. \end{cases}$$

Wir ordnen der Partition p auch eine $(n \times n)$ -Matrix $J(p)$ zu (die *Jordan-Matrix* zur Partition p mit Eigenwert 0), hier als typisches Beispiel der Fall $p = (5, 4, 4, 2, 1, 1)$:

$$J((5, 4, 4, 2, 1, 1)) = \begin{bmatrix} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{array} & & & & & & \\ & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{array} & & & & \\ & & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{array} & & & \\ & & & \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{array} & & \\ & & & & \begin{array}{c} 0 & 1 \\ & 0 \end{array} & \\ & & & & & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \end{bmatrix}$$

wobei alle weiteren Einträge Nullen sind. Die allgemeine Regel lautet: es ist $J(p) = (a_{ij})_{ij}$ mit $a_{r,r+1} = 1$ für alle r , die nicht von der Form $\sum_{i \leq s} p_i$ sind, und $a_{ij} = 0$ sonst. Entlang der Diagonale sind also entsprechende $(p_i \times p_i)$ -Matrizen aufgereiht.

Natürlich ist $J(p)$ die Matrizendarstellung von f_p bezüglich der kanonischen Basis des K^n .

4.8.3. Satz. *Sei p eine Partition. Für jede natürliche Zahl s gilt*

$$\text{Kern}(f_p^s) = L(e_{ij} \mid 1 \leq j \leq s).$$

Beweis: Sei $U = L(e_{ij} \mid 1 \leq j \leq s)$ und $g = f_p^s$. Offensichtlich gilt: $U \subseteq \text{Kern } g$ (denn nach Definition ist $f_p^j(e_{ij}) = 0$; ist also $j \leq s$, so ist $g(e_{ij}) = f_p^s(e_{ij}) = f_p^{s-j} f_p^j(e_{ij}) = f_p^{s-j}(0) = 0$).

Es reicht also zu zeigen: $\dim \text{Kern}(g) \leq \dim U$ (denn wäre U ein echter Unterraum von $\text{Kern}(g)$, so wäre $\text{Kern}(g) > \dim U$). Ist $(i, j) \in Y(p)$ und $j > s$, so ist $e_{i, j-s} \in Y(p)$ und gehört zum Bild von g (denn $g(e_{ij}) = f_p^s(e_{ij}) = e_{i, j-s}$). Ist also r der Rang von g , so ist

$$r \geq \sum_{j>s} p'_j = n - \sum_{j \leq s} p'_j.$$

Die Dimensionsformel für Kern und Bild eines Endomorphismus besagt: $\dim \text{Kern}(g) + r = n$, also ist

$$\dim \text{Kern}(g) = n - r \leq \sum_{j \leq s} p'_j.$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

4.8.4. Folgerung 1.

$$\dim \text{Kern}(f_p^s) - \dim \text{Kern}(f_p^{s-1}) = p'_s.$$

Beweis: Lemma 4.8.3 liefert $\dim \text{Kern}(f_p^s) = \sum_{j=1}^s p'_j$, daraus folgt die Behauptung.

Folgerung 2. *Seien p, q Partitionen von n . Ist $p \neq q$, so sind die Matrizen $J(p)$ und $J(q)$ nicht ähnlich.*

Beweis: Angenommen, die Matrizen $J(p)$ und $J(q)$ sind ähnlich. Dann sind auch die Matrizen $J(p)^s$ und $J(q)^s$ für jedes s ähnlich. Sind aber Matrizen A, B ähnlich, so haben die Kerne der linearen Abbildungen f_A und f_B die gleiche Dimension. Es ist $f_{J(p)^s} = f_p^s$ und $f_{J(q)^s} = f_q^s$. Wir verwenden nun Folgerung 1:

$$p'_s = \dim \text{Kern}(f_p^s) - \dim \text{Kern}(f_p^{s-1}) = \dim \text{Kern}(f_q^s) - \dim \text{Kern}(f_q^{s-1}) = q'_s.$$

Da $p'_s = q'_s$ für alle s gilt, ist $p' = q'$, also $p = q$.

4.8.5. Satz 2. *Sei K ein Körper. Zu jeder nilpotenten $(n \times n)$ -Matrix A mit Koeffizienten in K gibt es eine Partition p von n , so dass A und $J(p)$ ähnlich sind.*

Zweite Formulierung. Ist V ein n -dimensionaler K -Vektorraum, und ist $f: V \rightarrow V$ nilpotenter Endomorphismus, so gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V und eine Partition p von n mit $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = J(p)$.

Zusatz (bezogen auf die zweite Formulierung): Die Partition p kann folgendermaßen berechnet werden: Die zu p duale Partition p' ist durch

$$p'_j = \dim \text{Kern}(f^j) - \dim \text{Kern}(f^{j-1})$$

für alle $j \geq 1$ gegeben; aus p' erhält man $p = (p')'$.

Beachte: Die Partition p ist wegen der Folgerung 2 eindeutig, dagegen ist die Basis $\mathcal{B}$ nicht eindeutig bestimmt!

Beweis. Sei $f: V \rightarrow V$ nilpotenter Endomorphismus, sei $\dim V = n$.

Ziel: Wir suchen eine Partition $p = (p_1, \dots, p_t)$ von n und eine Basis $\mathcal{B}$ von V , sodass gilt $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = J(p)$. Das bedeutet, dass wir die Elemente der Basis $\mathcal{B}$ in der Form v_{ij} mit $1 \leq i \leq t$, und $1 \leq j \leq p_i$ schreiben können, sodass gilt:

$$f(v_{ij}) = \begin{cases} v_{i,j-1} & j > 1, \\ 0 & j = 1. \end{cases}$$

Statt p werden wir zuerst die zu p duale Partition p' konstruieren (um daraus vermöge $p = (p')'$ auf p zu schließen. In der Tat lässt sich p' recht einfach berechnen!

Beginn des Beweises. Sei etwa $f^r = 0$. Dann gilt:

- $\text{Kern } f^0 = 0$.
- $\text{Kern } f^{j-1} \subseteq \text{Kern } f^j$ für $1 \leq j \leq r$.
- $\text{Kern } f^r = V$.

Wir werden mit folgender Unterraumkette

$$0 = \text{Kern}(f^0) \subseteq \text{Kern}(f) \subseteq \text{Kern}(f^2) \subseteq \dots \subseteq \text{Kern}(f^{r-1}) \subseteq \text{Kern}(f^r) = V.$$

arbeiten. Setzen wir

$$p'_j = \dim \text{Kern}(f^j) - \dim \text{Kern}(f^{j-1}),$$

so sehen wir, dass $p'_j \geq 0$ gilt. Noch wissen wir nicht, dass es sich bei $p' = (p'_1, p'_2, \dots)$ um eine Partition handelt (dass also jeweils $p'_j \geq p'_{j+1}$ gilt); dies wird aber als erstes bewiesen werden.

4.8.7. Lemma. Sei f nilpotenter Endomorphismus von V , sei $j \geq 2$. Sei $(v_1, \dots, v_s)$ eine Folge von Elementen in $\text{Kern}(f^j)$, die modulo $\text{Kern}(f^{j-1})$ linear unabhängig ist. Dann ist $(f(v_1), \dots, f(v_s))$ eine Folge von Elementen in $\text{Kern}(f^{j-1})$, die modulo $\text{Kern}(f^{j-2})$ linear unabhängig ist.

Beweis: Jedes Element $f(v_i)$ gehört zu $\text{Kern}(f^{j-1})$, denn $f^{j-1}f(v_i) = f^j(v_i) = 0$. Seien nun Elemente $c_i \in K$ gegeben, so dass $\sum_i c_i f(v_i)$ zu $\text{Kern}(f^{j-2})$ gehört. Dann gehört $\sum_i c_i v_i$ zu $\text{Kern}(f^{j-1})$, denn

$$f^{j-1}\left(\sum_i c_i v_i\right) = f^{j-2}f\left(\sum_i c_i v_i\right) = f^{j-2}\left(\sum_i c_i f(v_i)\right) = 0.$$

Da die Folge $(v_1, \dots, v_s)$ modulo $\text{Kern}(f^{j-1})$ linear unabhängig ist, folgt $c_i = 0$ für $1 \leq i \leq s$.

Wir haben $p'_j = \dim \text{Kern}(f^j) - \dim \text{Kern}(f^{j-1})$ gesetzt. Aus dem Lemma folgt sofort:

Folgerung. p' ist eine Partition.

Beweis: Sei $(v_1, \dots, v_s)$ eine Komplementärbasis zu $\text{Kern}(f^{j-1})$ in $\text{Kern}(f^j)$, also $s = p'_j$. Sei $j \geq 2$. Das Lemma besagt, dass $(f(v_1), \dots, f(v_s))$ zu $\text{Kern}(f^{j-1})$ gehören, und linear unabhängig modulo $\text{Kern}(f^{j-2})$ sind. Also ist $s \leq p'_{j-1}$. Wir sehen also: $p'_j \leq p'_{j-1}$.

Da p' eine Partition ist, ist auch $p = (p')'$ eine Partition.

4.8.8. Nun beginnen wir mit dem eigentlichen Beweis von Satz 2. Wir konstruieren induktiv Komplementärbasen $(v_{1,j}, \dots, v_{p'_j,j})$ zu $\text{Kern}(f^{j-1})$ in $\text{Kern}(f^j)$, und zwar in absteigender Folge, wir beginnen also mit $j = r$, dann kommt $j = r - 1$, und so weiter, bis schließlich $j = 1$.

Induktionsanfang: Wähle eine beliebige Komplementärbasis

$$(v_{1,r}, \dots, v_{p'_r,r})$$

zu $\text{Kern}(f^{r-1})$ in $\text{Kern}(f^r) = V$.

Induktionsschritt: sei schon $(v_{1,j}, \dots, v_{p'_j,j})$ konstruiert, dies sei also eine Komplementärbasis zu $\text{Kern}(f^{j-1})$ in $\text{Kern}(f^j)$, für ein $1 \leq j \leq r$. Ist $2 \leq j$, so wende f an, wir erhalten eine Folge $(f(v_{1,j}), \dots, f(v_{p'_j,j}))$, die nach dem Lemma in $\text{Kern}(f^{j-1})$ liegt und modulo $\text{Kern}(f^{j-2})$ linear unabhängig ist. Wir setzen

$$(*) \quad v_{i,j-1} = f(v_{i,j}) \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq p'_j.$$

Wir können diese Folge $(v_{1,j-1}, \dots, v_{p'_j,j-1})$ zu einer Komplementärbasis

$$(v_{1,j-1}, \dots, v_{p'_j,j-1}, v_{p'_j+1,j-1}, \dots, v_{p'_{j-1},j-1})$$

zu $\text{Kern}(f^{j-2})$ in $\text{Kern}(f^{j-1})$ fortsetzen.

Die Elemente $v_{i,j}$ mit $1 \leq i \leq p'_j$ und $1 \leq j \leq r$ bilden eine Basis von V und $(*)$ zeigt, dass die Wirkung von f auf dieser Basis genau der Wirkung von $J(p)$ auf den Basiselementen $e_{ij}^{(p)}$ entspricht. Damit ist Satz 2 bewiesen.

4.8.9. Folgerung. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) A ist nilpotent.
- (ii) A ist ähnlich zu einer Matrix der Form $J(p)$, mit p Partition von n .
- (iii) $\chi_A = T^n$.
- (iv) $A^n = 0$.

Beweis: (i) $\implies$ (ii): Dies wurde gerade bewiesen. (ii) $\implies$ (iii): Ist A ähnlich zu $J(p)$, so ist $\chi_A = \chi_{J(p)} = T^n$. (iii) $\implies$ (iv): Dies folgt aus dem Satz von Cayley-Hamilton.

Hier alle Partitionen p von $n=5$ und die zugehörigen Young-Diagramme und die Jordanmatrizen $J(p)$:

(5)	(4, 1)	(3, 2)	(3, 1, 1)	(2, 2, 1)	(2, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 1, 1)
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & & & \\ & 0 & 0 & & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$

Sei A eine nilpotente Matrix mit Koeffizienten im Körper K . Der Beweis von Satz 2 liefert ein effektives Verfahren, um nicht nur die Partition p zu finden, sodass A und $J(p)$ ähnlich sind (wie im Zusatz formuliert), sondern auch, um eine invertierbare Matrix P angeben zu können mit $P^{-1}AP = J(p)$.

4.8.10. Beispiel. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sei $f = f_A: V \rightarrow V$, mit $V = K^4$. Es ist

$$V_1 = \text{Kern}(f) = L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \quad V_2 = \text{Kern}(f^2) = L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right),$$

und $\text{Kern } f^3 = V$. Insbesondere ist A nilpotent. Wir sehen also:

$$\begin{aligned} p'_1 &= \dim \text{Kern}(f) = 2, \\ p'_2 &= \dim \text{Kern}(f^2) - \dim \text{Kern}(f) = 3 - 2 = 1, \\ p'_3 &= \dim \text{Kern}(f^3) - \dim \text{Kern}(f^2) = 4 - 3 = 1. \end{aligned}$$

Also

$$p' = (2, 1, 1), \quad \text{daher} \quad p = (3, 1).$$

Wähle $v_{13} \in V \setminus V_2$, zum Beispiel $v_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Wir berechnen

$$v_{12} = Av_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad v_{11} = Av_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wir ergänzen v_{11} durch einen Vektor $v_{21} \in V_1$ zu einer Basis von V_1 , zum Beispiel

wählen wir $v_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dann haben wir also Vektoren v_{ij} konstruiert, die in das Young-

Diagramm zur Partition $p = (3, 1)$ passen:

v_{11}	v_{12}	v_{13}
v_{21}		

Die Matrix P habe als Spalten die Vektoren $v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}$ (in dieser Reihenfolge), also

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$P^{-1}AP = J((3, 1)).$$

Nach Konstruktion muss dies richtig sein (wenn wir uns nicht verrechnet haben).

Überflüssig: Man kann dies natürlich nachträglich verifizieren; berechnet man

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

so sieht man:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Verifikation kann man viel einfacher vornehmen: Statt P^{-1} zu berechnen und die beiden Multiplikationen $P^{-1} \cdot A \cdot P$ vorzunehmen, reicht es zu zeigen, dass gilt

$$AP = PJ((3, 1))$$

und dass P invertierbar ist. Offensichtlich entsteht $PJ((3, 1))$ aus P , indem einige Spalten von P nach rechts verschoben werden, und die übrigen Spalten durch Nullen ersetzt werden (genauer: die erste und die zweite Spalte werden jeweils um eine Spalte nach rechts verschoben, die neue erste und die vierte Spalte sind Nullspalten). Genau dies ist aber die Wirkung von A auf die Spalten $v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}$ von P : es ist

$$Av_{11} = 0, \quad Av_{12} = v_{11}, \quad Av_{13} = v_{12}, \quad Av_{21} = 0.$$

Zusatz (ebenfalls überflüssig). Satz 1 beschreibt den Kern von f_p^s . Im Beweis des Satzes haben wir auch das Bild von f_p^s beschrieben:

$$\text{Im}(f^s) = L(e_{ij} \mid 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq p_i - s).$$

Hier einige Bilder dazu:

