### 4.9. Das charakteristische Polynom sei Produkt von linearen Polynomen.

#### 4.9.1. Das charakteristische Polynom sei Potenz eines linearen Polynoms.

Wir betrachten nun eine Matrix $A$, sodass das charakteristische Polynom $\chi_A$ in Linearfaktoren zerfällt und alle diese Linearfaktoren gleich sind, also

$$\chi_A = (T-\gamma)^n$$

für ein $\gamma \in K$.

Ist $\gamma \in K$ und ist $p$ eine Partition von $n$, so setze

$$J(\gamma,p) = \gamma E_n + J(p),$$

Man nennt $J(\gamma,p)$ eine *Jordan-Matrix zum Eigenwert* $\gamma$. Hier ein Beispiel einer Jordan-Matrix zum Eigenwert $\gamma$, und zwar zur Partition $(5,4,4,2,1,1)$:

$$J(\gamma,(5,4,4,2,1,1)) = \begin{bmatrix}
\gamma & 1 \\
& \gamma & 1 \\
& & \gamma & 1 \\
& & & \gamma & 1 \\
& & & & \gamma \\
& & & & & \gamma & 1 \\
& & & & & & \gamma & 1 \\
& & & & & & & \gamma & 1 \\
& & & & & & & & \gamma \\
& & & & & & & & & \gamma & 1 \\
& & & & & & & & & & \gamma & 1 \\
& & & & & & & & & & & \gamma & 1 \\
& & & & & & & & & & & & \gamma \\
& & & & & & & & & & & & & \gamma & 1 \\
& & & & & & & & & & & & & & \gamma \\
& & & & & & & & & & & & & & & \gamma \\
& & & & & & & & & & & & & & & & \gamma
\end{bmatrix}$$

Ist $p$ eine Partition mit nur einem Teil, also $p = (n)$, so spricht man von einem *Jordan-Block.* Jordan-Blöcke sind also $(n \times n)$-Matrizen der Form

$$J(\gamma,n) = \begin{bmatrix}
\gamma & 1 & & & \\
& \gamma & 1 & & \\
& & \ddots & \ddots & \\
& & & \gamma & 1 \\
& & & & \gamma
\end{bmatrix}$$

(es ist $J(\gamma,n) = (a_{ij})_{ij}$ mit $a_{ii} = \gamma$ für $1 \le i \le n$, $a_{i,i+1} = 1$ für $1 \le i < n$ und $a_{ij} = 0$ sonst).

Eine Jordan-Matrix $J(\gamma,p)$ entsteht dadurch, dass man Jordan-Blöcke $J(\gamma,p_i)$ entlang der Hauptdiagonale aneinanderreiht, und zwar geordnet nach der Größe. Verwendet man für diese Aneinandereihung entlang der Hauptdiagonalen das Symbol $\bigoplus$, so kann man für $\gamma \in K$ und $p = (p,\dots,p_s)$ schreiben:

$$J(\gamma,p) = \bigoplus_{i=1}^{s} J(\gamma,p_i).$$

Natürlich ist $J(0,p) = J(p)$.

**Satz.** *Sei $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum, sei $\gamma \in K$. Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $(f-\gamma\cdot 1)^e = 0$, für eine natürliche Zahl $e$. Dann gibt es eine Partition $p$ von $n$, so dass $f$ bezüglich einer geeigneten Basis von $V$ die Matrix-Darstellung $J(\gamma,p)$ hat.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist $f-\gamma\cdot 1$ nilpotent, wird also bezüglich einer geeigneten Basis durch eine Matrix der Form $J(p)$ dargestellt (dabei ist $p$ eine Partition). Also wird $f$ bezüglich dieser Matrix durch $\gamma E_n + J(p) = J(\gamma,p)$ dargestellt.

**Matrix-Formulierung.** *Sei $A \in M(n\times n, K)$. Das charakteristische Polynom $\chi_A$ sei von der Form $\chi_A = (T-\gamma)^n$. Dann ist $A$ ähnlich zu einer Matrix der Form $J(\gamma,p)$ für eine Partition $p$.*

### 4.9.2. Die Hauptraum-Zerlegung.

Dieser Abschnitt ist eine Zusatz-Bemerkung und kann überschlagen werden.

Der Satz 4.5.3 besagte Folgendes: Sei $A \in M(n\times n, K)$ und $\phi$ ein normiertes Polynom in $K[T]$ mit $\phi(A) = 0$. Schreiben wir $\phi = \phi_1 \cdots \phi_t$ mit paarweise teilerfremden Polynomen $\phi_i$ und setzen wir $U_i = \{v \in K^n \mid \phi_i(A)v = 0\}$, so ist $K$ die direkte Summe der Unterräume $U_i$ und nach 4.5.2 (b) sind diese Unterräume $U_i$ $A$-invariant.

Für $\phi$ können wir das charakteristische Polynom $\chi_A$ von $A$ nehmen (nach dem Satz von Cayley-Hamilton), oder auch das Minimalpolynom $\mu_A$.

Bei der Faktorisierung $\phi = \phi_1 \cdots \phi_t$ wird man meist für jedes $\phi_i$ eine geeignete Potenz eines irreduziblen Polynoms wählen. Ist $\psi$ ein irreduzibles Polynom, so setzt man

$$\begin{aligned}\mathrm{Haupt}(A,\psi) &= \{v \in K^n \mid \psi(A)^n(v) = 0\} \\ &= \{v \in K^n \mid \psi(A)^t(v) = 0 \text{ für ein } t \geq 0\}\end{aligned}$$

und nennt dies einen *Hauptraum* für $A$ und $\psi$. Es gilt:

$$K^n = \bigoplus\nolimits_{\psi} \mathrm{Haupt}(A,\psi)$$

(dabei durchläuft der Index $\psi$ alle normierten irreduziblen Polynome), dies ist die *Hauptraum-Zerlegung* von $K^n$.

In der Hauptraum-Zerlegung können nur endlich viele dieser Haupträume von Null verschieden sein, es sind dies gerade die Räume $\mathrm{Haupt}(A,\psi)$, für die $\psi$ ein Teiler des Minimalpolynoms (oder, dazu äquivalent, ein Teiler des charakteristischen Polynoms) ist.

Wir interessieren uns nur für den Fall, dass das charakteristische Polynom (und damit das Minimalpolynom) ein Produkt von Linearfaktoren ist. Statt $\mathrm{Haupt}(A, T-\gamma)$ schreibt man dann einfach $\mathrm{Haupt}(T,\gamma)$.

**4.9.3. Die Jordan'sche Normalform.**

Sei $K$ ein Körper. Sei $A \in M(n \times n, K)$ eine Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Sei also

$$\chi_A = (T - \gamma_1)^{n_1} \cdots (T - \gamma_s)^{n_s}$$

mit paarweise verschiedenen $\gamma_i \in K$ und mit natürlichen Zahlen $n_i \in \mathbb{N}_1$.

Für jedes $\gamma \in K$ definiert man den zugehörigen *Hauptraum* durch

$$\operatorname{Haupt}(A, \gamma) = \{v \in K^n \mid (A - \gamma E_n)^n v = 0\},$$

definieren (dies entspricht der allgemeineren Definition in 4.9.2).

*Genau dann ist* $\operatorname{Haupt}(A, \gamma) \neq 0$*, wenn* $\gamma$ *ein Eigenwert von* $A$ *ist, und es gilt immer*

$$\operatorname{Eig}(A, \gamma) \subseteq \operatorname{Haupt}(A, \gamma).$$

Wichtig ist: *Alle Unterräume* $\operatorname{Haupt}(A, \gamma_i)$ *sind* $A$*-invariant und es ist*

$$K^n = \bigoplus_{i=1}^{s} \operatorname{Haupt}(A, \gamma_i).$$

Man nennt dies die *Hauptraum-Zerlegung* von $V$ (hier braucht man die Voraussetzung, dass das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt und man muss Satz 4.5.3 verwenden).

Wählen wir Basen der Unterräume $\operatorname{Haupt}(A, \gamma_i)$, so erhalten wir eine Basis von $K^n$ und bezüglich dieser Basis hat $A$ eine Matrizendarstellung der Form

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_s \end{bmatrix},$$

dabei ist $A_i$ eine Matrizendarstellung der Einschränkung der Abbildung $u \mapsto Au$ auf $\operatorname{Haupt}(A, \gamma_i)$.

Nach Definition von $\operatorname{Haupt}(A, \gamma_i)$ ist die Einschränkung der Abbildung $u \mapsto Au$ auf $\operatorname{Haupt}(A, \gamma_i)$ eine Abbildung $f_i$ mit $(f_i - \gamma_i \cdot 1)^{n_i} = 0$. Derartige Endomorphismen werden aber bei geeigneter Basiswahl durch Jordan-Matrizen der Form $J(\gamma_i, p^{(i)})$ bechrieben (wobei $p^{(i)}$ eine Partition von $n_i$ ist).

**Satz.** *Sei* $A \in M(n \times n, K)$ *eine Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Dann gibt es paarweise verschiedene Elemente* $\gamma_1, \dots, \gamma_s \in K$ *und zu jedem* $\gamma_i$ *eine Partition* $p^{(i)}$*, so dass* $A$ *ähnlich zur Matrix* $\bigoplus_i J(\gamma_i, p^{(i)})$ *ist.*

*Ist umgekehrt $A$ ähnlich zur Matrix $\bigoplus_{i=1}^{s} J(\gamma_i, p^{(i)})$, wobei $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ paarweise verschiedene Elemente aus $K$ sind, und jedes $p^{(i)}$ eine Partition von $n_i$ ist, für $1 \leq i \leq s$ (mit $\sum_i n_i = n$), so sind die $\gamma_i$ die Eigenwerte von $A$, die Vielfachheit von $T - \gamma_i$ in $\chi_A$ ist $n_i$, die Vielfachheit von $T - \gamma_i$ in $\mu_A$ ist $p^{(i)}_1$.*

Man nennt eine Matrix der Form $\bigoplus_i J(\gamma_i, p^{(i)})$ eine *Jordan'sche Normalform.*

**Eindeutigkeit.** Vertauscht man die einzelnen Blöcke $J(\gamma_i, p^{(i)})$ untereinander, so erhält man eine zur gegebenen Matrix ähnliche Matrix. Bis auf derartige Vertauschungen ist die Jordan'sche Normalform eindeutig:

*Sind zwei Matrizen $\bigoplus_i J(\gamma_i, p^{(i)})$ und $\bigoplus_i J(\lambda_i, q^{(i)})$ ähnlich, so gibt es eine Permutation $\sigma$ mit $\gamma_i = \lambda_{\sigma(i)}$ und $p^{(i)} = q^{(\sigma(i))}$.*

Dies folgt zum Beispiel daraus, dass man zu jedem Eigenwert $\gamma_i$ die zugehörige Partition $p^{(i)}$ direkt berechnen kann. Dies soll nun formuliert werden.

**Verfahren zur Bestimmung der Jordan'schen Normalform.** Sei $\gamma = \gamma_i$ ein Eigenwert von $A$. Wie sieht die zugehörige Partition $p = p^{(i)}$ aus? Betrachte die Matrizen der Form

$$\gamma E_n - A,\ (\gamma E_n - A)^2,\ (\gamma E_n - A)^3,\ \ldots$$

Sei $r_i$ der Rang der Matrix $(\gamma E_n - A)^i$ für $i \geq 1$ und $r_0 = n$ (dies ist natürlich gerade der Rang der Matrix $(\gamma E_n - A)^0 = E_n$). *Dann ist $(r_0 - r_1, r_1 - r_2, \ldots)$ die zu $p$ duale Partition.*

Hier alle Jordan'schen Normalformen von Matrizen mit charakteristischem Polynom $(T-2)^4(T-3)^2$, unter jeder Matrix steht das Minimalpolynom:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 2&1&&&& \\ &2&1&&& \\ &&2&1&& \\ &&&2&& \\ \hline &&&&3&1 \\ &&&&&3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|cc} 2&1&&&& \\ &2&1&&& \\ &&2&&& \\ &&&2&& \\ \hline &&&&3&1 \\ &&&&&3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|cc} 2&1&&&& \\ &2&&&& \\ &&2&1&& \\ &&&2&& \\ \hline &&&&3&1 \\ &&&&&3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|cc} 2&1&&&& \\ &2&&&& \\ &&2&&& \\ &&&2&& \\ \hline &&&&3&1 \\ &&&&&3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|cc} 2&&&&& \\ &2&&&& \\ &&2&&& \\ &&&2&& \\ \hline &&&&3&1 \\ &&&&&3 \end{array}\right]$$

$(T-2)^4(T-3)^2$ $\quad$ $(T-2)^3(T-3)^2$ $\quad$ $(T-2)^2(T-3)^2$ $\quad$ $(T-2)^2(T-3)^2$ $\quad$ $(T-2)(T-3)^2$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 2&1&&&& \\ &2&1&&& \\ &&2&1&& \\ &&&2&& \\ \hline &&&&3& \\ &&&&&3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|cc} 2&1&&&& \\ &2&1&&& \\ &&2&&& \\ &&&2&& \\ \hline &&&&3& \\ &&&&&3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|cc} 2&1&&&& \\ &2&&&& \\ &&2&1&& \\ &&&2&& \\ \hline &&&&3& \\ &&&&&3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|cc} 2&1&&&& \\ &2&&&& \\ &&2&&& \\ &&&2&& \\ \hline &&&&3& \\ &&&&&3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|cc} 2&&&&& \\ &2&&&& \\ &&2&&& \\ &&&2&& \\ \hline &&&&3& \\ &&&&&3 \end{array}\right]$$

$(T-2)^4(T-3)$ $\quad$ $(T-2)^3(T-3)$ $\quad$ $(T-2)^2(T-3)$ $\quad$ $(T-2)^2(T-3)$ $\quad$ $(T-2)(T-3)$

**Folgerung (additive Jordan-Zerlegung).** *Sei $K$ ein Körper. Sei $A \in M(n \times n, K)$ eine Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Dann lässt sich*

*$A$ als Summe $A = D + J$ einer diagonalisierbaren Matrix $D$ und einer nilpotenten Matrix $J$, mit $DJ = JD$ schreiben.*

Beweis: Wir wissen, dass $A$ zu einer Matrix der Form $B = \bigoplus_i \big(\gamma_i I_{n_i} + J(p^{(i)})\big)$ ähnlich ist, es gibt also eine invertierbare Matrix $S$ mit $A = S^{-1}BS$. Wir können $B = B' + B''$ schreiben mit $B' = \bigoplus_i \gamma_i I_{n_i}$ und $B'' = \bigoplus_i J(p^{(i)})$. Die Matrix $B'$ ist eine Diagonalmatrix, $B''$ ist nilpotent, und man sieht leicht, dass $B'B'' = B''B'$ gilt. Setze $D = S^{-1}A'S$ und $J = S^{-1}B''S$. Dann ist $D$ diagonalisierbar, $J$ nilpotent, und es ist

$$DJ = S^{-1}B'SS^{-1}B''S = S^{-1}B'B''S = S^{-1}B''B'S = JD.$$

**Zusatz.** *Diese Zerlegung ist eindeutig: Ist $A = D + J = D' + J'$ mit diagonalisierbaren Matrizen $D, D'$ und nilpotenten Matrizen $J, J'$, so gilt $D = D', J = J'$.*

Zum Beweis des Zusatzes braucht man eine schärfere Formulierung des Existenzsatzes, die hier nicht bewiesen wird:

**Satz.** *Sei $K$ ein Körper. Sei $A \in M(n \times n, K)$ eine Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Dann gibt es ein Polynom $\phi \in K[T]$, sodass $\phi(A)$ eine Diagonalmatrix und $A - \phi(A)$ nilpotent ist.*

Setzt man $D = \phi(A)$ und $J = T - D$, so sieht man: die Matrizen $D, J$ vertauschen mit allen Matrizen, die mit $A$ vertauschen. Ist nun eine Zerlegung $A = D' + J'$ gegeben mit $D'$ diagonalisierbar, $J'$ nilpotent und $D'J' = J'D'$, so gilt auch $AJ' = (D' + J')J' = J'(D' + J') = J'A$, demnach vertauscht $J'$ mit $A$, also auch mit $J$. Es folgt: die Matrix $J' - J$ ist nilpotent. Entsprechend folgt aus $AD' = D'A$, dass auch $DD' = D'D$ gilt, die Matrizen $D, D'$ sind also gleichzeitig diagonalisierbar, und daher ist auch $D - D'$ diagonalisierbar. Aus $D + J = A = D' + J'$ folgt $D - D' = J' - J$ und diese Matrix ist sowohl diagonalisierbar, als auch nilpotent und daher die Nullmatrix: Dies zeigt $D = D'$ und $J = J'$.

**Warnung:** Ob ein Polynom in Linearfaktoren zerfällt oder nicht, ist davon abhängig, welchen Körper man als Grundkörper betrachtet. *Ist $f$ ein Polynom, so gibt es einen endlichen Erweiterungskörper, über dem $f$ in Linearfaktoren zerfällt.* (Algebra I) Jeder Körper ist einbettbar in einen “algebraisch abgeschlossenen” Körper: in ihm zerfällt jedes Polynom in Linearfaktoren (dies wird in der Vorlesung Algebra I gezeigt). Arbeiten wir mit dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, und ist $f \in \mathbb{R}[T]$, so zerfällt $f$ über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen in Linearfaktoren (der “Fundamentalsatz der Algebra”).