Beispiel 1. Sei $n = 2$ und sei

$$q(T_1, T_2) = 5T_1^2 - 8T_1T_2 + 5T_2^2, \quad \text{also} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_A(T) = (T-5)^2 - 16 = T^2 - 10T + 9 = (T-1)(T-9),$$

die Eigenwerte sind also 1 und 9. Ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist der Vektor $[1,1]^t$, ein Eigenvektor zum Eigenwert 9 ist $[-1,1]^t$. Wir erhalten also folgende Orthonormalbasis

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

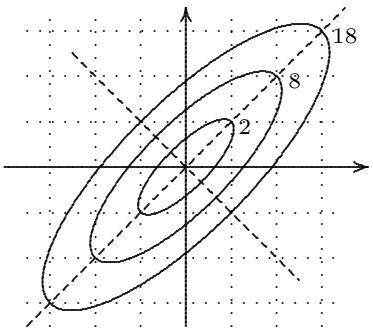
Setzen wir $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, so ist dies eine orthogonale Matrix (und zwar eine Drehung) und es gilt

$$S^t A S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Natürlich liefert eine quadratische Form $q(T_1, T_2)$ eine Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sie ist durch $(x_1, x_2) \mapsto q(x_1, x_2)$ definiert und wird üblicherweise ebenfalls mit q bezeichnet.

Ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben, so bezeichnen wir mit $V(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = 0\}$ ihre Nullstellenmenge ("Varietät"). Die Nullstellenmengen $V(f - c)$ mit $c \in \mathbb{R}$ liefern offensichtlich eine vollständige Beschreibung der Funktion f, ein sogenannten "Höhenlinien-Bild" (wie man es von Wanderkarten und Atlanten her kennt).

Das folgende Bild zeigt einige "Höhenlinien" unserer Funktion q, und zwar die Mengen $V(q(T_1, T_2) - c)$ mit $c = 2, 8, 18$. Diese Nullstellenmengen sind jeweils Ellipsen, ihre Hauptachsen sind gerade die Eigengeraden der Matrix A, sie sind gestrichelt eingezeichnet.



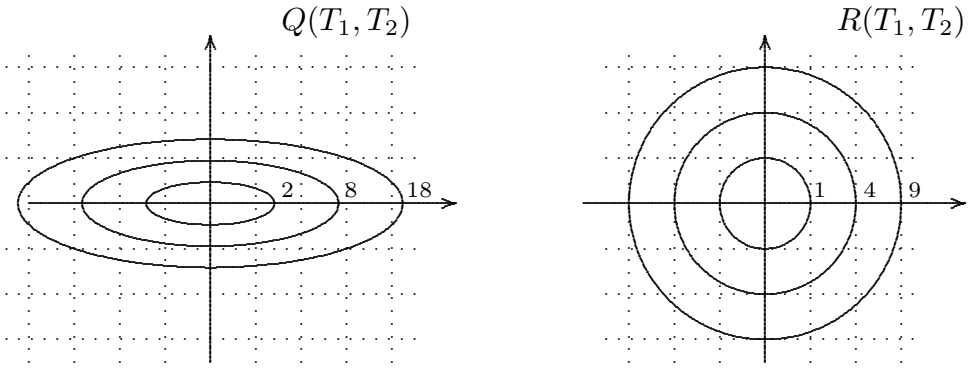
Wir sehen: Durch die Drehung S_1 können wir erreichen, dass die Koordinatenachsen die Hauptachsen sind, wir erhalten zur transformierten Matrix $B = S_1^t A S_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{smallmatrix}\right]$ die quadratische Form

$$Q(T_1, T_2) = T_1^2 + 9T_2^2.$$

Die entsprechende Funktion $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wird duch das folgende linke Bild beschrieben; durch eine zusätzliche Skalierung der Koordinatenachsen erhalten wir aus $Q(T_1, T_2)$ das quadratische Polynom

$$R(T_1, T_2) = T_1^2 + T_2^2,$$

dabei verwenden wir die Matrix $S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ und bilden $C = S_2^t B S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Das folgende recht Bild zeigt Nullstellenmengen $V(R(T_1, T_2) - c)$ für $c > 0$, es sind jeweils Kreise:

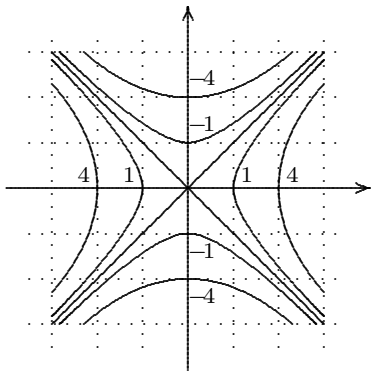


Die Matrix A, die wir hier betrachtet haben, hat die Signatur $(2, 0, 0)$. Betrachten wir statt $q = q(T_1, T_2)$ das Polynom $-q$, so ist die Signatur der zugehörigen Matrix $(0, -2, 0)$, das Bild der Nullstellenmengen $V(\dots)$ (also der "Höhenlinien") ändert sich bis auf die Beschriftung nicht: die Höhenlinien von q zum Wert c sind für $-q$ diejenigen zum Wert $-c$.

Beispiel 2. Wesentlich verschiedene Höhenlinien erhalten wir, wenn es sich um eine Matrix A mit Signatur $(1, 1, 0)$ handelt, dann nämlich sind die Höhenlinien für $c \neq 0$ Hyperbeln, und für $c = 0$ erhält man ein sich schneidendes Geradenpaar. Das typische derartige Beispiel erhält man durch

$$q(T_1, T_2) = T_1^2 - T_2^2,$$

hier das entsprechende Höhenlinienbild:



Ein wesentlicher Unterschied dieses Hyperbelbilds (im Gegensatz zum Ellipsenbild) ist das Vorhandensein von Vektoren $0 \neq x \in \mathbb{R}^2$ mit $q(x) = 0$. Einen Unterraums $U \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $q|U = 0$ nennt man einen *total-isotropen* Unterraum. Die Signatur von A ist $(1, 1, 0)$, also

ist die maximale Dimension eines total-isotropen Unterraums $U \subseteq \mathbb{R}^2$ gleich 1. Man sieht: Die Nullstellenmenge $V(q)$ ist ein Paar sich schneidender Geraden: Die Faktorisierung

$$q(T_1, T_1) = T_1^2 - T_2^2 = (T_1 - T_2)(T_1 + T_2)$$

zeigt $V(q) = V(T_1 - T_2) \cup V(T_1 + T_2)$ und diese beiden Geraden sind die maximalen total-isotropen Unterräume.

Beachte: Die Hauptachsen für $q(T_1, T_2) = T_1^2 - T_2^2$ sind die Koordinatenachsen (denn dies sind ja die Eigengeraden der Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$), — nicht etwa die beiden total-isotropen Geraden!

Es bleiben die Fälle mit Signatur $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$ und $(0, 0, 2)$; in den ersten beiden Fällen sind die "Höhenlinien" jeweils Geraden (oder besser: Paare paralleler Geraden), im letzten Fall ist A die Nullmatrix und q ist das Nullpolynom.

6. Die isometrische Klassifikation der Quadriken im $\mathbb{R}^n$.

6.1. Erinnerung: Orthogonale Matrizen, orthogonale Endomorphismen.

Orthogonale Matrizen und Endomorphismen wurden schon in LA I betrachtet! Eine reelle $(n \times n)$-Matrix A heißt *orthogonal,* falls A invertierbar ist mit

$$A^{-1} = A^t.$$

Genau dann ist A orthogonal, wenn die Spalten von A eine Orthonormalbasis des kanonischen euklid'schen Raums $\mathbb{R}^n$ bilden, und auch genau dann, wenn die Transponierten der Zeilen von A eine Orthonormalbasis des kanonischen euklid'schen Raums $\mathbb{R}^n$ bilden.

(1) Ist V ein n-dimensionaler euklid'scher Raum und sind zwei Orthonormalbasen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gegeben, so sind die zugehörigen Basiswechselmatrizen orthogonale Matrizen.

> Ist $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis des K-Vektorraums V, so gibt es einen Vektorraum-Isomorphismus $\Phi_{\mathcal{A}} \colon K^n \to V$, der den kanonischen i-ten Basisvektor von K^n auf den Vektor v_i abbildet. Sind nun $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Basen von V, so sind die linearen Abbildungen
>
> $$\Phi_{\mathcal{A}}^{-1}\Phi_{\mathcal{B}}, \quad \text{und} \quad \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}\Phi_{\mathcal{A}}$$
>
> durch invertierbare Matrizen in $M(n \times n, K)$ gegeben, man nennt sie die Basiswechselmatrizen.

(2)(a) Sei A eine reelle $(n \times n)$-Matrix. Genau dann ist A orthogonal, wenn die Abbildung $l_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein orthogonaler Endomorphismus (bezüglich des kanonischen inneren Produkts auf $\mathbb{R}^n$) ist.

(2)(b) Ist V ein euklid'scher Vektorraum mit Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, und ist $f\colon V \to V$ orthogonaler Endomorphismus, so ist die Matrizendarstellung $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ von f bezüglich dieser Basis eine orthogonale Matrix.

Die Menge der orthogonalen $(n \times n)$-Matrizen bildet eine Untergruppe $\mathcal{O}(n)$ der Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Sei $V = (V, \langle , -, - \rangle)$ ein euklid'scher Vektorraum. Die Menge der orthogonalen Automorphismen von V bildet eine Untergruppe $\mathcal{O}(V)$ der Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ aller Automorphismen von V. Wir können (2) umformulieren:

(2)(a) Die Zuordnung $A \mapsto l_A$ ist ein Gruppen-Isomorphismus

$$l_- \colon \mathcal{O}(n) \to \mathcal{O}(\mathbb{R}^n).$$

(2)(b) Ist V ein euklidischer Vektorraum mit endlicher Basis $\mathcal{B}$, so ist die Zuordnund $f \mapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ein Gruppen-Isomorphismus

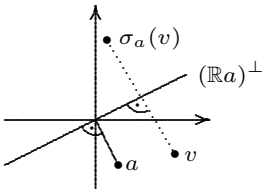
$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(-)\colon \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(n).$$

(3) *Ist A eine orthogonale Matrix, so ist* $|\det A| = 1$. (Denn es ist $1 = \det A^{-1}A = \det(A^t \cdot A) = (\det A)^2$.). Ist $\det A = 1$, so nennt man A *orientierungserhaltend* (oder eigentlich), ist $\det A = -1$, so nennt man A *orientierungsumkehrend* (oder uneigentlich).

(4) Sei $0 \neq a \in V$. Definiere eine Abbildung $\sigma_a\colon V \to V$ durch

$$\sigma_a(v) = v - \frac{2\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle} a \quad \text{für} \quad v \in V.$$

Dies ist ein orthogonaler Endomorphismus, mit $\sigma_a^2 = 1$, es ist $\sigma_a(a) = -a$ und $\sigma_a(v) = v$ für alle $v \in (\mathbb{R}a)^\perp$. Beweis: Nachrechnen. Man nennt dies die *Spiegelung* an der Hyperebene $(\mathbb{R}a)^\perp$.



Lemma. *Sind $u \neq v \in V$, mit $||u|| = ||v||$, so gilt $\sigma_{v-u}(v) = u$.* (Es gibt also eine Spiegelung, die die beiden Vektoren u und v vertauscht.)

Beweis: Ganz allgemein gilt: $\langle u + v, v - u\rangle = ||v||^2 - ||u||^2$. Wegen $||v|| = ||u||$ folgt hieraus $\langle v, v - u\rangle = -\langle u, v - u\rangle$, also ist $\frac{2\langle v, v-u\rangle}{\langle v-u, v-u\rangle} = 1$. Berechnet man nun $\sigma_{v-u}(v)$, so erhält man

$$\sigma_{v-u}(v) = v - \frac{2\langle v, v-u\rangle}{\langle v-u, v-u\rangle}(v-u) = v - (v-u) = u.$$

Man sieht also: Betrachte die *Sphäre* $\Sigma_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| = r\}$ *mit Radius r*. Zu je zwei Elementen $u, v \in \Sigma_r$ gibt es $\phi \in \mathcal{O}(n)$ mit $\phi(u) = v$; man sagt: Die Gruppe $\mathcal{O}(V)$ operiert *transitiv* auf der Menge Σ_r.

Satz. *Jeder orthogonale Endomorphismus des $\mathbb{R}^n$ kann als Produkt von höchstens n Spiegelungen geschrieben werden.* (Siehe LA I, Übungsaufgabe 11.4). H

Beweis: Sei $\phi \in \mathcal{O}(n)$. Ist $\phi = 1$, so ist ϕ "Produkt von 0 Spiegelungen". Sei nun $u \in \mathbb{R}$ mit $\phi(u) \neq u$. Die Vektoren $u, \phi(u)$ haben gleiche Länge, also gibt es σ_a mit $\sigma_a(u) = \phi(u)$. Es ist also $\sigma_a \circ \phi(u) = u$. Sei $U = \langle u \rangle^\perp$. Da u unter $\sigma_a \circ \phi$ auf sich abgebildet wird, gilt das gleiche für den Unterraum U der Dimension $n-1$. $\phi' = \sigma_a \circ \phi \mid U$. Nach Induktion ist ϕ' Produkt von Spiegelungen σ'_{a_i} mit $a_i \in U$ und $2 \leq i \leq t$ mit $t \leq n$. Dies sind Einschränkungen der entsprechenden Spiegelungen $\sigma_{a_i} \in \mathcal{O}(V)$, also ist

$$\sigma_a \circ \phi(x) = \sigma_{a_2} \circ \cdots \circ \sigma_{a_t}(x) \quad \text{für alle} \quad x \in U.$$

Aber natürlich auch für $x = u$, demnach für alle $x \in V$. Wir sehen:

$$\sigma_a \circ \phi = \sigma_{a_2} \circ \cdots \circ \sigma_{a_t}.$$

Multiplizieren wir von links mit $\sigma_a^{-1} = \sigma_a$, so erhalten wir

$$\phi = \sigma_{a_1} \circ \sigma_{a_2} \circ \cdots \circ \sigma_{a_t},$$

dabei haben wir $a_1 = a$ gesetzt.

In Teil LA II, Teil 5 wurde gezeigt:

(5) **Der Haupsatz über orthogonale Endomorphismen und Matrizen.** *Ist A eine orthogonale Matrix, so gibt es eine orthogonale Matrix P mit $P^{-1}AP = \bigoplus_{i=1}^m C_i$, wobei die Matrizen C_i (1×1)-Matrizen $[1]$ oder $[-1]$ oder (2×2)-Drehmatrizen $D(\phi)$ zu Winkeln $0 < \phi_i < \pi$.*

6.2. Isometrien des $\mathbb{R}^n$.

Wir betrachten hier den kanonischen euklid'schen Vektorraum $(\mathbb{R}^n, \langle -, - \rangle)$. Sind $a, b \in \mathbb{R}^n$, so setze

$$d(a, b) = ||a - b||,$$

man nennt $d(a, b)$ der *Abstand* der Punkte a, b (man erhält auf diese Weise eine "Metrik" auf $\mathbb{R}^n$).

Eine Abbildung $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *Isometrie* (oder *Bewegung*), falls gilt:

$$d(\phi(a), \phi(b)) = d(a, b) \quad \text{für alle} \quad a, b \in \mathbb{R}^n$$

(verlangt wird also nur, dass ϕ abstandserhaltend ist). Zwei Arten von Isometrien spielen eine besondere Rolle: Einerseits die *Translationen* t_a mit $a \in \mathbb{R}^n$; es ist $t_a(x) = x + a$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und andererseits die orthogonalen Endomorphismen.

Satz. *Sei* $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *eine Isometrie. Dann gibt es einen orthogonalen Endomorphismus* $\phi'\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *und einen Vektor* $a \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\phi = t_a \circ \phi'$. Der Vektor a wie auch der orthogonale Endomorphismus ϕ' sind durch ϕ eindeutig bestimmt. (Es ist $a = \phi(0)$ und $\phi'(x) = \phi(x) - a$.)

Beweis: Sei $a = \phi(0)$. Sei $\phi'(x) = \phi(x) - a$. Dann ist

$$\phi'(0) = \phi(0) - a = \phi(0) - \phi(0) = 0.$$

(1) Es gilt $d(\phi'(x), \phi'(y)) = d(\phi(x) - a, \phi(y) - a)) = d(\phi(x), \phi(y)) = d(x, y)$.

(2) Es gilt $\langle \phi'(x), \phi'(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
\langle \phi'(v), \phi'(w)\rangle &= \frac{1}{2}\big(||\phi'(v)||^2 + ||\phi'(w)||^2 - ||\phi'(v) - \phi'(w)||^2\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(d(\phi'(v), 0)^2 + d(\phi'(w), 0)^2 - d(\phi'(v), d'(w))^2\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(d(v, 0)^2 + d(w, 0)^2 - d(v, w)^2\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(||v||^2 + ||w||^2 - ||v - w||^2\big) = \langle v, w\rangle
\end{aligned}$$

Es genügt nun, folgendes Lemma zu zeigen:

Lemma. *Ist* $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *eine (mengentheoretische) Abbildung mit* $\langle \psi(x), \psi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}^n$*, so ist* ψ *linear* (es gibt also eine Matrix A mit $\psi = l_A$, und A ist natürlich eine orthogonale Matrix).

Beweis: Wir berechnen für $v, v' \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die Länge von $\psi(v+v') - \psi(v) - \psi(v')$ und von $\psi(\lambda v) - \lambda\psi(v)$, oder besser, das Quadrat der Längen:

$$\begin{aligned}
&\langle \psi(v + v') - \psi(v) - \psi(v'), \psi(v + v') - \psi(v) - \psi(v')\rangle \\
&\quad = \langle \psi(v + v'), \psi(v + v')\rangle - \langle \psi(v + v'), \psi(v)\rangle - \cdots + \langle \psi(v'), \psi(v')\rangle \\
&\quad = \langle v + v', v + v'\rangle - \langle v + v', v\rangle - \cdots + \langle v', v'\rangle \\
&\quad = \langle v + v' - v - v', v + v' - v - v'\rangle = \langle 0, 0\rangle = 0.
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\langle \psi(\lambda v) - \lambda\psi(v), \psi(\lambda v) - \lambda\psi(v)\rangle \\
&\quad = \langle \psi(\lambda v), \psi(\lambda v)\rangle - 2\lambda\langle \psi(\lambda v), \psi(v)\rangle + \lambda^2\langle \psi(v), \psi(v)\rangle \\
&\quad = \langle \lambda v, \lambda v\rangle - 2\lambda\langle \lambda v, v)\rangle + \lambda^2\langle v, v\rangle \\
&\quad = \langle \lambda v - \lambda v, \lambda v - \lambda v\rangle = \langle 0, 0\rangle = 0
\end{aligned}$$

Es folgt also $\psi(v + v') - \psi(v) - \psi(v') = 0$ und $\psi(\lambda v) - \lambda\psi(v) = 0$.

Die Hintereinanderschaltung zweier Isometrien ist wieder eine Isometrie. Aus obigem Satz folgt unmittelbar, dass Isometrien immer bijektiv sind, und natürlich ist dann die Umkehrabbildung wieder eine Isometrie. Die Menge aller Isometrien bildet (bezüglich der Hintereinanderschaltung von Abbildungen) eine Gruppe $\mathcal{B}(n)$. Die Gruppe der orthogonalen

Endomorphismen von $\mathbb{R}^n$ haben wir mit $\mathcal{O}(n)$ bezeichnet; die Gruppe der Translationen wird mit $\mathcal{T}(n)$ bezeichnet.

Ist $g \in \mathcal{O}(n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$, so erhält man das Produkt von $g \circ t_a$ als

$$g \circ t_a = t_{g(a)} \circ g,$$

denn $(g \circ t_a)(x) = g(x+a) = g(x) + g(a) = (t_{g(a)} \circ g)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist für $g_1, g_2 \in \mathcal{O}(n)$ und $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\big(t_{a_1} \circ g_1\big) \circ \big(t_{a_2} \circ g_2\big) &= t_{a_1} \circ g_1 \circ t_{a_2} \circ g_2 \\ &= t_{a_1} \circ t_{g(a_2)} \circ g_1 \circ g_2 = t_{a_1+g(a_2)} \circ \big(g_1 \circ g_2\big),\end{aligned}$$

dabei ist $g_1 \circ g_2$ wieder in $\mathcal{O}(n)$. Das Inverse von $t_a \circ \phi$ ist

$$\big(t_a \circ \phi\big)^{-1} = t_{a'} \circ \phi^{-1} \quad \text{mit} \quad a' = -\phi^{-1}(a).$$

Wir sehen, dass die Zuordnung $t_a \circ g \mapsto g$ einen Gruppen-Homomorphismus

$$\eta\colon \mathcal{B}(n) \to \mathcal{O}(n)$$

liefert. Eine Bewegung ϕ heißt *orientierungserhaltend* (oder eigentlich), falls $\eta(\phi)$ orientierungserhaltend ist (falls also $\det \eta(\phi) = 1$ gilt), und *orientierungsumkehrend* (oder uneigentlich) sonst.

Der Kern der kanonischen Abbildung $\eta\colon \mathcal{B}(n) \to \mathcal{O}(n)$ ist gerade die Menge $\mathcal{T}(n)$ der Translationen. Die Gruppe $\mathcal{T}(n)$ der Translationen ist zur additiven Gruppe $(\mathbb{R}^n, +)$ isomorph (und zwar vermöge der Zuordnung $a \mapsto t_a$, für $a \in \mathbb{R}^n$), insbesondere ist sie kommutativ.

Sei $n = 3$. *Jede orientierungserhaltende Isometrie mit einem Fixpunkt ist eine Drehung* (um eine Achse, dies ist eine beliebige Gerade im $\mathbb{R}^3$, mit einem Winkel α, dies ist eine beliebige Zahl zwischen 0 und 2π). Beweis: Wir können annehmen, dass der Fixpunkt der Ursprung ist. Also haben wir es mit einer orthogonalen Abbildung zu tun. Da sie orientierungserhaltend ist, hat sie einen Eigenwert 1, also eine "Achse" und ist eine entsprechende Drehung. Dies ist durchaus überraschend: *Die Hintereinanderschaltung zweier Drehungen einer Kugel mit beliebigen Drehachsen ist wieder eine Drehung!*

6.4. Erweiterte Vektoren.

Auch Isometrien des $\mathbb{R}^n$ lassen sich sehr gut durch Matrizen beschreiben, allerdings brauchen wir $(n+1) \times (n+1)$-Matrizen. Eine Isometrie ϕ des $\mathbb{R}^n$ ist von der Form $\phi(x) = Ax + a$, für alle $x \in \mathbb{R}^n$, dabei ist $A \in \mathcal{O}(n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$, also $\phi = t_a \circ l_A$. Wir ordnen diesem Paar A, a die $(n+1) \times (n+1)$-Matrix $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{smallmatrix}\right]$ zu. Natürlich gilt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ Ax+a \end{bmatrix},$$

dies zeigt, dass der Isometrie $t_a \circ l_A$ die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{bmatrix}$ zugeordnet ist. Man kann dies auch so formulieren: Wir betrachten die Zuordnung $\eta\colon \mathcal{B}(n) \to GL(n+1,\mathbb{R})$

$$\eta(t_a \circ l_A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{bmatrix} \quad \text{für} \quad a \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad A \in \mathcal{O}(n)$$

dies ist ein injektiver Gruppen-Homomorphismus; ist $\phi \in \mathcal{B}(n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$, so gilt:

$$\eta(\phi) \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi(x) \end{bmatrix}.$$

Wir ordnen hier also jedem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ den Vektor $x' = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ zu und nennen ihn den *erweiterten* Vektor.

6.4. Einschub: Polynome und ihre Nullstellenmengen.

Eine wichtige Frage der Algebra (wie auch der algebraischen Geometrie) ist die Untersuchung der Nullstellenmenge von Polynomen. Gegeben ist dabei ein Körper K und wir betrachten den Polynomring $K[T_1,\dots,T_n]$ in den Variablen $T_1,\dots,T_n$; dabei bildet man induktiv $K[T_1,\dots,T_n] = K[T_1,\dots,T_{n-1}][T_n]$ (zuerst $K[T_1]$, dann $K[T_1,T_2]$, usw). Polynome, also die Elemente von $K[T_1,\dots,T_n]$, lassen sich als Linearkombinationen von Monomen mit Koeffizienten in K schreiben, ein *Monom* ist von der Form $T_1^{d_1}T_1^{d_2}\cdots T_n^{d_n}$ mit natürlichen Zahlen $d_1,\dots,d_n$, der Grad dieses Monoms ist $\sum d_i$. Polynome sind also von der Form

$$P = P(T_1,\dots,T_n) = \sum_{d_1,\dots,d_n} c_{d_1,\dots,d_n}\, T_1^{d_1}T_1^{d_2}\cdots T_n^{d_n} \quad \text{mit} \quad c_{d_1,\dots,d_n} \in K$$

(summiert wird über Folgen der Form $(d_1,\dots,d_n) \in \mathbb{N}_0^n$, dabei dürfen nur endlich viele Summanden mit $c_{d_1,\dots,d_n} \neq 0$ auftreten). Der *Grad* von P ist das Maximum der Grade der Monome $T_1^{d_1}T_1^{d_2}\cdots T_n^{d_n}$ mit $c_{d_1,\dots,d_n} \neq 0$. Polynome vom Grad 1 heißen *linear,* solche vom Grad 2 heißen *quadratisch.*

Ist $P(T_1,\dots,T_n)$ ein Polynom, so bezeichnet man mit

$$V(P) = \{(x_1,\dots,x_n) \in K^n \mid P(x_1,\dots,x_n) = 0\}$$

die *Nullstellenmenge von P.* (Der Buchstabe V steht für das Wort *Varietät*, das in der algebraischen Geometrie üblicherweise vewendet wird.) Im Rahmen der linearen Algebra interessiert man sich natürlich für lineare Polynome und deren Nullstellenmengen: *die Nullstellenmenge eines linearen Polynoms ist eine Hyperebene.* Es zeigt sich, dass man mit den Methoden der linearen Algebra auch die quadratischen Polynome und ihre Nullstellenmengen untersuchen kann, dies soll jetzt geschehen. Die Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms nennt man eine *Quadrik.*

Ein Polynom, das eine Linearkombination von Monomen eines festen Grads d ist, heißt *homogen vom Grad d*. Ein homogenes quadratisches Polynom (man spricht auch von einer *quadratischen Form*) ist also auf folgende Weise gegeben:

$$P = P(T_1, \ldots, T_n) = \sum\nolimits_{1 \le i \le j \le n} \alpha_{ij} T_i T_j, \quad \text{mit} \quad a_{ij} \in K.$$

6.5. Quadriken: Isometrische Klassifikation

Eine Quadrik ist die Nullstellenmenge eines (nicht notwendig homogenen) quadratischen Polynoms. Ein quadratisches Polynom ist von der Form

$$P = P(T_1, \ldots, T_n) = \sum\nolimits_{1 \le i \le j \le n} \alpha_{ij} T_i T_j + \sum\nolimits_{1 \le j \le n} \alpha_{0j} T_j + \alpha_{00},$$

mit Koeffizienten α_{ij} in einem Körper K. Auch hier wollen wir mit einer Matrix arbeiten. Ist $\mathrm{char}(K) \neq 2$, so ordnen wir P die erweiterte Koeffizientenmatrix A' mit

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha_{ij} & \text{falls} \quad i < j \\ \alpha_{ii} & \text{falls} \quad i = j \\ \frac{1}{2}\alpha_{ji} & \text{falls} \quad i > j \end{cases}$$

für $0 \le i, j \le n$ zu. Neben der Matrix A' betrachten wir auch die Matrix $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. Dem Vektor $x = [x_1 \ \cdots \ x_n]^t$ ordnen wir den erweiterten Vektor $x' = [1 \ x_1 \ \cdots \ x_n]^t$ zu. Wir erhalten dann

$$P(x) = (x')^t A' x'.$$

Wir sehen also, dass sich auch nicht-homogene quadratische Polynome mit Hilfe von symmetrischen Matrizen beschreiben lassen.

Unser Ziel ist es, Normalformen der Quadriken im $\mathbb{R}^n$ zu beschreiben: Jedes reelle Polynom P in n Variablen liefert eine Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, nämlich

$$[x_1, \ldots, x_n]^t \mapsto P(x_1, \ldots, x_n),$$

diese Abbildung bezeichnet man meist ebenso mit P. Durch jeden Basiswechsel und jede Verschiebung des Koordinatensystems im $\mathbb{R}^n$ werden die Koeffizienten von P verändert; wir fragen, inwieweit wir durch eine Verschiebung des Koordinatensystems und einen orthogonalen Basiswechsel die Form von P vereinfachen können. Gesucht ist also eine Isometrie ϕ des $\mathbb{R}^n$, so dass die Hintereinanderschaltung

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^n \xrightarrow{P} \mathbb{R}$$

eine möglichst einfache Form hat. Da wir hier vor allem an der Nullstellenmenge $V(P)$ interessiert sind, werden wir auch erlauben, dass P durch ein skalares Vielfaches γP mit $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ersetzt wird, denn für derartige Vielfache gilt $V(\gamma P) = V(P)$.

Satz (Isometrische Klassifikation der Quadriken in $\mathbb{R}^n$). *Sei P ein Polynom vom Grad 2 in n Variablen mit reellen Koeffizienten. Dann gibt es eine Isometrie φ des $\mathbb{R}^n$, und reelle Zahlen d_i mit $1 \le i \le m$, so dass $P \circ \phi$ ein skalares Vielfaches eines der folgenden Polynome ist:*

(**a**) $$\sum_{i=1}^{m} d_i T_i^2,$$

(**b**) $$\sum_{i=1}^{m} d_i T_i^2 - 1,$$

(**c**) $$\sum_{i=1}^{m} d_i T_i^2 - T_{m+1}.$$

mit $d_i \neq 0$ für $1 \le i \le m$; dabei ist jeweils $1 \le m \le n$ und im Fall (c) *ist $m < n$.*

Zusatz. Es ist einfach festzustellen, welcher der Fälle **(a), (b)** oder **(c)** vorliegt: Sei $P = P(T_1, \ldots, T_n) = P_2 + L$, dabei sei P_2 ein homogenes quadratisches Polynom, während L ein Polynom mit Grad höchstens 1 ist. Die (erweiterte) Koeffizientenmatrix von P sei A', die Koeffizientenmatrix von P_2 sei A. Sei $m = \operatorname{rang}(A)$, $m' = \operatorname{rang}(A')$. Dann gilt:

$m' = m$	Fall **(a)**,
$m' = m + 1$	Fall **(b)**,
$m' = m + 2$	Fall **(c)**.

Der Beweis des Satzes erfolgt in 3 Schritten, alle diese Schritte sind weitgehend konstruktiv. Will man eine gegebene Quadrik in Normalform bringen, so wird man meist diese drei Schritte durchführen.

Schritt 1 (Hauptachsentransformation). Wir wählen in $\mathbb{R}^n$ eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ bezüglich des kanonischen inneren Produkts, die aus Eigenvektoren von A besteht. Seien $d_1, \ldots, d_n$ die zugehörigen Eigenwerte. Wir werden immer voraussetzen, dass $d_i = 0$ für $m < i \le n$ gilt. Falls notwendig, können wir annehmen, dass die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ so angeordnet sind, dass $d_i > 0$ für $1 \le i \le p$ und $d_i < 0$ für $p < i \le m (= p + q)$ gilt (oder aber auch, dass zuerst die Eigenvektoren mit negativen, danach die mit positiven Eigenwerten kommen). Es gibt also eine orthogonale Matrix S mit $S^t A S = D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$ gilt. Statt A' betrachten wir nun die transformierte Matrix $B' = G_1^t A' G_1$, dabei ist G_1 die direkte Summe der (1×1)-Matrix $[1]$ und der Matrix S:

$$B' = G_1^t A' G_1 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & S^t & \\ 0 & & & \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|ccc} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ \hline a_{10} & & & \\ \vdots & & A & \\ a_{n0} & & & \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & S & \\ 0 & & & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc} b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ \hline b_1 & d_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_n & & & d_n \end{array}\right]$$

Schritt 2. Sei $u = [u_1, \ldots, u_n]^t$ mit

$$u_i = \begin{cases} -\frac{b_i}{d_i} & \text{für} \quad 1 \le i \le p + q \\ 0 & \text{für} \quad p + q < i \le n \end{cases}$$

und betrachte die Matrix

$$G_2 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & 1 & & \\ u & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array}\right]$$

Bilden wir nun $C' = G_2^t B' G_2$, so erhalten wir eine Matrix der Form

$$C' = G_2^t B' G_2 = \left[\begin{array}{c|ccc|ccc} c & 0 & \cdots & 0 & b_{m+1} & \cdots & b_n \\ \hline 0 & d_1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & & d_m & & & \\ \hline b_{m+1} & & & & & & \\ \vdots & & 0 & & & 0 & \\ b_n & & & & & & \end{array}\right]$$

Schritt 3. Wir unterscheiden nun 3 Fälle: Wir erinnern daran, dass wir den Rang der Matrix A' (und damit auch den der Matrizen B' und C') mit m' bezeichnet haben.

Fall (a): $c = 0$ und $b_{m+1} = \cdots = b_n = 0$. *In diesem Fall ist* $m' = m$. Hier haben wir es mit dem homogenen quadratischen Polynom

$$\sum_{i=1}^{m} d_i T_i^2$$

zu tun.

Fall (b): $c \neq 0$ und $b_{m+1} = \cdots = b_n = 0$. *In diesem Fall gilt* $m' = m + 1$. Wir multiplizieren wir das Polynom mit $-\frac{1}{c}$ und erhalten

$$\sum_{i=1}^{m} d_i T_i^2 - 1,$$

dabei können wir wieder annehmen, dass $d_i > 0$ für $1 \leq i \leq p$ und $d_i < 0$ für $p < i \leq m$ gilt.

Fall (c): Es gibt ein i mit $b_i \neq 0$. *In diesem Fall gilt* $m' = m+2$. Wir betrachten den Vektor $w = [b_{m+1}, \ldots, b_n]^t \in \mathbb{R}^{n-m}$ und normieren ihn: $w_1 = \frac{1}{||w||} w$. Sei $w_1, \ldots, w_{n-m}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{n-m}$ (bekanntlich erhalten wir eine solche Orthonormalbasis, indem wir eine beliebige Basis, die w_1 als erstes Element enthält, nach dem Gram-Schmidt-Verfahren orthonormalisieren). Sei nun $R \in \mathrm{GL}(n-m, \mathbb{R})$ mit Spalten $w_1, \ldots, w_{n-m}$, dies ist eine orthogonale Matrix. Sei $v = -\frac{c}{2\langle w, w \rangle} w$. Wir bilden die Matrix

$$G_3 = \left[\begin{array}{c|ccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & & 1 & & & \\ \hline v & & 0 & & & R & \end{array}\right]$$

Bilden wir nun $D' = G_3^t C' G_3$, so erhalten wir die Matrix

$$D' = G_3^t C' G_3 = \left[\begin{array}{c|ccc|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & ||w|| & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & d_1 & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & 0 & & \\ 0 & & & d_m & & & & \\ \hline ||w|| & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \\ \vdots & & 0 & & & 0 & & \\ 0 & & & & & & & \end{array}\right]$$

Das zugehörige quadratische Polynom $\sum_{i=1}^m d_i T_i^2 + 2||w|| T_{m+1}$ können wir durch Multiplikation mit $-\frac{1}{2||w||}$ in die Form

$$\sum_{i=1}^m d_i' T_i^2 - T_{m+1}$$

bringen.

Es sollte betont werden, dass im Schritt 3 die drei Fälle (a), (b), (c) gerade den drei Möglichkeiten für $m' - m = 0, 1, 2$ entsprechen. Insbesondere sehen wir, dass in den Fällen $m' - m = 0$ und 1 nur die beiden Schritte 1 und 2 von Bedeutung sind.

Zum Abschluss des Beweises sollten wir uns vergewissern, dass die betrachteten Matrizen G_1, G_2, G_3 wirklich Isometrien des $\mathbb{R}^n$ beschreiben. Die Matrix G_1 beschreibt eine orthogonale Änderung des Koordinatensystems, die Matrix G_2 eine Translation, die dritte Matrix G_3 ist Hintereinanderschaltung einer orthogonalen Änderung des Koordinatensystems und einer Translation.

Wir wollen uns diese Klassifikation genauer anschauen. Dabei ist es sinnvoll, bei den Diagonalkoeffizienten d_i zu berücksichtigen, ob sie positiv oder negativ sind — das Aussehen der Nullstellenmenge $V(P)$ hängt ganz entschieden davon ab. Wir setzen $r_i = d_i$ falls d_i positiv ist, und $r_i = -d_i$, falls d_i negativ ist. Sei p die Anzahl der positiven d_i, dabei können wir in den Fällen (a) und (c) voraussetzen, dass $p \geq \frac{1}{2}m$ gilt; im Fall (c) müssen wir dann noch T_{m+1} durch $-T_{m+1}$ ersetzen.

Umformulierung. *Sei P ein quadratisches Polynom in n Variablen mit reellen Koeffizienten. Dann gibt es eine Isometrie φ des $\mathbb{R}^n$, und* **positive** *reelle Zahlen r_i mit $1 \leq i \leq m$, so dass $P \circ \phi$ ein skalares Vielfaches eines der folgenden Polynome ist:*

(**a**) $$\sum_{i=1}^p r_i T_i^2 - \sum_{i=p+1}^m r_i T_i^2,$$

(**b**) $$\sum_{i=1}^p r_i T_i^2 - \sum_{i=p+1}^m r_i T_i^2 - 1,$$

(**c**) $$\sum_{i=1}^p r_i T_i^2 - \sum_{i=p+1}^m r_i T_i^2 - T_{m+1}.$$

dabei ist jeweils $0 \le p \le m \le n$*, im Fall* (c) *ist* $m < n$*; in den Fällen* (a) *und* (c) *kann man zusätzlich* $p \ge \frac{1}{2}m$ *voraussetzen.*

Die isometrischen Normalformen im Fall $n = 2$**.**

m	m'	p	Polynom P	Bezeichnung für $V(P)$
Fall (a) $m' = m$				
1	1	1	$+T_1^2$	(Doppel-)Gerade
2	2	1	$+r_1T_1^2 - T_2^2$	Zwei sich schneidende Geraden
2	2	2	$+r_1T_1^2 + T_2^2$	Punkt
Fall (b) $m' = m + 1$				
1	2	0	$-r_1T_1^2 - 1$	$\emptyset$
1	2	1	$+r_1T_1^2 - 1$	Zwei parallele Geraden
2	3	0	$-r_1T_1^2 - r_2T_2^2 - 1$	$\emptyset$
2	3	1	$+r_1T_1^2 - r_2T_2^2 - 1$	Hyperbel
2	3	2	$+r_1T_1^2 + r_2T_2^2 - 1$	Ellipse
Fall (c) $m' = m + 2$				
1	3	1	$+r_1T_1^2 - T_2$	Parabel

Im allgemeinen interessieren uns nur Polynome, in denen alle Variablen T_i wirklich vorkommen. Ist nämlich P ein Polynom in den Variable $T_1, \ldots, T_n$ und $V(P)$ seine Nullstellenmenge in $\mathbb{R}^n$, so erhält man die Nullstellenmenge von P in $\mathbb{R}^{n+1}$ als Produkt $V(P) \times \mathbb{R}$. Man nennt $V(P) \times \mathbb{R}$ den *Zylinder* mit Basis $V(P)$.

Die isometrischen Normalformen von Zylindern im Fall $n = 3$**.**

m	m'	p	Polynom P	Bezeichnung für $V(P)$
Fall (a) $m' = m$				
1	1	1	$+T_1^2$	(Doppel-)Ebene
2	2	1	$+r_1T_1^2 - T_2^2$	Zwei sich schneidende Ebenen
2	2	2	$+r_1T_1^2 + T_2^2$	Punkt
Fall (b) $m' = m + 1$				
1	2	0	$-r_1T_1^2 - 1$	$\emptyset$
1	2	1	$+r_1T_1^2 - 1$	Zwei parallele Ebenen
2	3	0	$-r_1T_1^2 - r_2T_2^2 - 1$	$\emptyset$
2	3	1	$+r_1T_1^2 - r_2T_2^2 - 1$	Hyperbolischer Zylinder
2	3	2	$+r_1T_1^2 + r_2T_2^2 - 1$	Elliptischer Zylinder
Fall (c) $m' = m + 2$				
1	3	1	$+r_1T_1^2 - T_2$	Parabolischer Zylinder

Zweite Umformulierung des Klassifikationssatzes. *Sei P ein quadratisches Polynom in n Variablen mit reellen Koeffizienten. Dann gibt es eine Isometrie φ des $\mathbb{R}^n$, und* **positive** *reelle Zahlen r_i, so dass $P \circ \phi$ entweder ein Polynom in $n-1$-Variablen (also $V(P)$ ein Zylinder) ist, oder aber $P \circ \phi$ ein skalares Vielfaches eines der folgenden Polynome ist:*

(**a**) $$\sum_{i=1}^{p} r_i T_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} r_i T_i^2, \quad \text{mit} \quad \frac{n}{2} \leq p \leq n,$$

(**b**) $$\sum_{i=1}^{p} r_i T_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} r_i T_i^2 - 1, \quad \text{mit} \quad 0 \leq p \leq n,$$

(**c**) $$\sum_{i=1}^{p} r_i T_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n-1} r_i T_i^2 - T_n \quad \text{mit} \quad \frac{n-1}{2} \leq p \leq n-1.$$

Die isometrischen Normalformen im Fall $n = 3$, die keine Zylinder sind:

m	m'	p	Polynom P	Bezeichnung für $V(P)$
Fall (a) $m' = m$				
3	3	2	$+r_1T_1^2 + r_2T_2^2 - T_3^2$	elliptischer Kegel
3	3	3	$+r_1T_1^2 + r_2T_2^2 + T_3^3$	Punkt
Fall (b) $m' = m+1$				
3	4	0	$-r_1T_1^2 - r_2T_2^2 - r_3T_3^2 - 1$	$\emptyset$
3	4	1	$+r_1T_1^2 - r_2T_2^2 - r_3T_3^2 - 1$	Zweischaliges Hyperboloid
3	4	2	$+r_1T_1^2 + r_2T_2^2 - r_3T_3^2 - 1$	Einschaliges Hyperboloid
3	4	3	$+r_1T_1^2 + r_2T_2^2 + r_3T_3^2 - 1$	Ellipsoid
Fall (c) $m' = m+2$				
2	4	1	$+r_1T_1^2 - r_2T_2^2 - T_3$	Hyperbolisches Paraboloid
2	4	2	$+r_1T_1^2 + r_2T_2^2 - T_3$	Elliptisches Paraboloid

Bemerkung: In allen hier notierten Tabellen gilt: Die Zahlen r_i sind **positive** reelle Zahlen. Die Zahlen m, m', p haben folgende Bedeutung: Sei $P = P_2 + P_1 + P_0$, mit P_i homogen vom Grad i, und $P_2 \neq 0$. Sei A die Koeffizientenmatrix von P_2 und A' die (erweiterte) Koeffizientenmatrix von P. Es ist $m = \operatorname{rang}(A)$ und $m' = \operatorname{rang}(A')$, und A hat die Signatur $(p, m-p, n-m)$.

6.6. Quadriken: Affine Klassifikation

Sei V ein Vektorraum. Unter einer *affinen Abbildung* $\phi\colon V \to V$ versteht man die Hintereinanderschaltung eines Endomorphismus und einer Translation (dies ist für jeden Grundkörper K definiert), es ist also $\phi(v) = g(v) + u$ für alle $v \in V$, dabei ist $g\colon V \to V$ eine lineare Abbildung und $a \in V$ ein fest gewählter Vektor. Eine derartige affine

Abbildung ist genau dann invertierbar, wenn die zugehörige lineare Abbildung invertierbar ist. Sei nun ϕ eine affine Abbildung des Vektorraums K^n in sich, etwa $\phi(x) = Ax + a$, mit $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ und $a \in K^n$. Wie im Fall von Isometrien des $\mathbb{R}^n$ ordnen wir diesem Paar A, a die $(n+1)\times(n+1)$-Matrix $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{smallmatrix}\right]$ zu und arbeiten mit "erweiterten Vektoren": Dem Vektor $x = [x_1 \ \cdots \ x_n]^t$ ordnen wir den erweiterten Vektor $x' = [1 \ x_1 \ \cdots \ x_n]^t$ zu. Es gilt auch hier

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ Ax+a \end{bmatrix},$$

dies zeigt, wie man jeder affinen Abbildung eine darstellende Matrix zuordnen kann.

Satz (Affine Klassifikation der Quadriken in $\mathbb{R}^n$). *Sei P ein quadratisches Polynom in n Variablen mit reellen Koeffizienten. Dann gibt es eine invertierbare affine Abbildung φ des $\mathbb{R}^n$, so dass $P \circ \phi$ ein skalares Vielfaches eines der folgenden Polynome ist:*

(a) $$\sum\nolimits_{i=1}^{p} T_i^2 - \sum\nolimits_{i=p+1}^{m} T_i^2,$$

(b) $$\sum\nolimits_{i=1}^{p} T_i^2 - \sum\nolimits_{i=p+1}^{m} T_i^2 - 1,$$

(c) $$\sum\nolimits_{i=1}^{p} T_i^2 - \sum\nolimits_{i=p+1}^{m} T_i^2 - T_{m+1}.$$

dabei ist jeweils $0 \le p \le m \le n$, im Fall (c) *ist $m < n$; in den Fällen* (a) *und* (c) *kann man zusätzlich $p \ge \frac{1}{2}m$ voraussetzen.*

Beweis: wir erhalten dies Ergebnis unmittelbar aus der isometrischen Klassifkation, wenn wir bedenken, dass wir durch Skalierung der Koordinatenachsen die positiven Zahlen r_i durch 1 ersetzen können.