6.7. Einschub: Explizit — Implizit.

Vorbemerkung. Wir betrachten die Ebene $\mathbb{R}^2$, den dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$, oder allgemeiner den $\mathbb{R}^n$. Wenn wir geometrische Objekte in der Ebene, wie zum Beispiel Punkte und Geraden, oder Dreiecke, oder Kreise oder andere Kurven (oder geometrische Objekte im Raum, wie zum Beispiel Ebenen und andere Flächen) beschreiben wollen, so gibt es immer zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten:

- einerseits **Parametrisierungen**,
- andererseits Beschreibungen durch **Gleichungen** (und Ungleichungen);

dabei sind diese Objekte für uns nichts anderes als Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Ganz allgemein wird eine Teilmenge einer Menge M mit Hilfe der Mengenklammern $\{\dots\}$ beschrieben; zwischen diesen Klammern notiert man die Elemente der Menge, oder man gibt an, durch welche Eigenschaft die Elemente der Teilmenge ausgezeichnet sind.

Wir wollen den Unterschied zwischen expliziter und impliziter Beschreibung am Beispiel des Einheitskreises $C \subset \mathbb{R}^2$ in der Ebene diskutieren. Einerseits ist

$$C = \{(\cos\phi, \sin\phi) \mid \phi \in \mathbb{R}\} \quad \text{(Parametrisierung)},$$

andererseits gilt

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{(Gleichungs-Beschreibung)}.$$

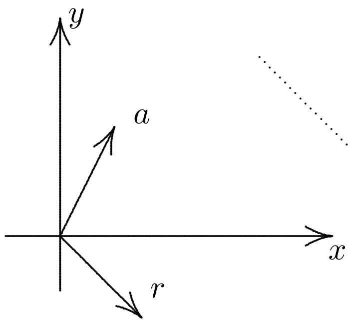
Kennt man eine Parametrisierung einer Teilmenge (wie hier von C), so ist es sehr einfach, Punkte anzugeben, die zur Teilmenge gehören (hier zum Beispiel sieht man, daß der Punkt $(\cos\frac{3}{7}, \sin\frac{3}{7})$ zu C gehört: man hat einfach $\phi = \frac{3}{7}$ genommen); dagegen ist es oft nicht einfach, zu entscheiden, ob ein vorgegebener Punkt (x,y) zur Teilmenge gehört oder nicht (es ist ja zu entscheiden, ob es zu vorgegebenem x und y ein ϕ gibt mit $x = \cos\phi$ und $y = \sin\phi$.)

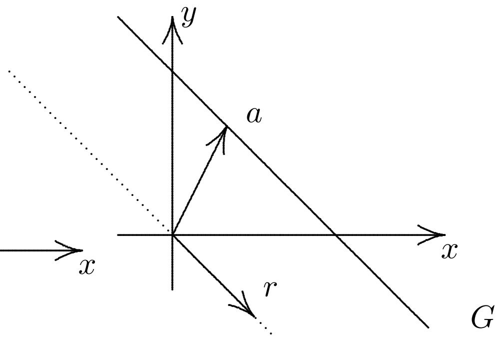
Die Gleichungs-Beschreibung leistet gerade das Umgekehrte: Ist eine Gleichungs-Beschreibung bekannt, so kann man meist sehr einfach feststellen, ob ein gegebener Punkt zum Objekt gehört oder nicht (man setzt die Koordinaten in den Gleichungsterm ein, und überprüft auf diese Weise, ob die Gleichung erfüllt ist); dagegen ist es bei Objekten, die durch eine Gleichung beschrieben sind, oft gar nicht einfach, Punkte anzugeben, die diese Bedingung erfüllen.

Schön ist es, wenn man sowohl die eine wie die andere Beschreibung zur Verfügung hat, dann kann man je nach Fragestellung mit der günstigeren Beschreibung arbeiten!

Geraden im $\mathbb{R}^n$: explizite Beschreibungen. Gegeben seien zwei Punkte $a, r \in \mathbb{R}^n$, mit $b \neq 0$. Die *Gerade durch a mit Richtungsvektor r* ist die Menge

$$G = a + \mathbb{R}r = \{a + tr \mid t \in \mathbb{R}\}.$$



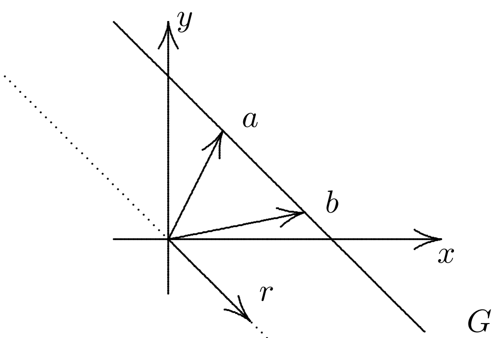


Dabei sieht man folgendes: Für $a = 0$ erhält man die Ursprungsgerade $\mathbb{R}r$. Fixiert man $r (\neq 0)$ und variiert man $a \in \mathbb{R}^n$, so erhält man alle zur Ursprungsgeraden $\mathbb{R}r$ parallelen Geraden. *Ersetzt man den Richtungsvektor r durch ein skalares Vielfaches $r' \neq 0$, so erhält man die gleiche Gerade.*

Sind zwei verschiedene Punkte a und b im $\mathbb{R}^n$ gegeben, so wird die Gerade G durch a und b folgendermaßen beschrieben:

$$G = \{a + t(b - a) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Der Differenzvektor $r = b - a$ ist nach Voraussetzung von Null verschieden, dient also als Richtungsvektor (man erhält eine Gerade und sieht unmittelbar, dass die Punkte a, b beide auf der Geraden liegen: $t = 0$ liefert den Punkt a, und $t = 1$ den Punkt b).



Man kann diese Gerade G auch folgendermaßen beschreiben:

$$G = \{\lambda a + (1 - \lambda) b \mid \lambda \in \mathbb{R}\};$$

hier erhält man für $\lambda = 1$ den Punkt a und für $\lambda = 0$ den Punkt b (für $0 \leq \lambda \leq 1$ erhält man die Strecke mit den Endpunkten a und b).

Geraden in der Ebene $\mathbb{R}^2$: implizite Beschreibungen. Jede lineare Gleichung $c_1 X_1 + c_2 X_2 = d$ mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ und $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ beschreibt eine Gerade G in der Ebene, also

$$G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid c_1 x_1 + c_2 x_2 = d\}$$

(und man erhält alle Geraden auf diese Weise).

Mit Hilfe des kanonischen Skalarprodukts können wir dies umschreiben:

$$G = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle c, x\rangle = d\}$$

(mit $c = (c_1, c_2)$). Wenn man will, kann man den Vektor c (er ist ja von Null verschieden) noch normieren ("Hessesche Normalform").

Wie findet man die Hessesche Normalform der Geraden durch die Punkte $a \neq b$? Wie wir wissen, ist $b - a$ ein Richtungsvektor für diese Gerade. Man nimmt als c einen zu $b - a$ orthogonalen Vektor der Länge 1.

Quadriken: explizit und implizit. Die Definition einer Quadrik als Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms ist eine implizite Beschreibung. Es ist nicht allzu schwer für die betrachteten Normalformen jeweils eine explizite Beschreibung zu finden. Für die Paraboloide ist dies natürlich ganz einfach: man löst einfach nach der T_{m+1} auf.

Geraden auf Quadriken. Wir betrachten nun nochmals Quadriken im $\mathbb{R}^3$ und fragen, wann es auf einer derartigen Quadrik Q zu jedem Punkt mindestens eine Gerade gibt, die auf der Fläche liegt und den Punkt enthält. Dies gilt natürlich immer, wenn Q ein nicht-leerer Zylinder ist, und auch im Fall eines Doppelkegels. Nicht ganz offensichtlich (aber wichtig) ist, dass es zwei weitere Fälle gibt:

Satz. *Sei F ein einschaliges Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid. Ist x ein Punkt auf F, so gibt es genau zwei Geraden G_1, G_2 mit $x \in G_i \subset F$ für $i = 1, 2$.*

Wie findet man diese Geraden G_1, G_2 ? Wir betrachten den Fall des hyperbolische Parabolid $F = V(P)$ mit $P = \alpha^2 X - \beta^2 Y - Z$, dabei seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Sei also $(x, y, z) \in V(P)$ und sei $0 \neq (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ Wann liegen alle Punkte $(x+at, y+bt, z+ct)$ der Geraden durch den Punkt (x, y, z) mit Richtungsvektor (a, b, c) in $V(P)$? In diesem Fall gilt also

$$\alpha^2(x + at)^2 - \beta^2(y + bt)^2 - (z + ct) = 0.$$

Wir multiplizieren aus, und verwenden, dass $\alpha^2 x - \beta^2 y - z = 0$ ist. Wir erhalten

$$2\alpha^2 axt + \alpha^2 a^2 t^2 - 2\beta^2 byt - \beta^2 b^2 t^2 - ct = 0.$$

Interessant ist dies füt $t \neq 0$. In diesem Fall können wir durch t teilen, wir erhalten:

$$\alpha^2 a^2 t - \beta^2 b^2 t = -2\alpha^2 ax + 2\beta^2 by + c.$$

Links steht $(\alpha^2 a^2 - \beta^2 b^2)t$, also Vielfache der Zahl $\alpha^2 a^2 - \beta^2 b^2$, rechts steht eine Konstante (keine Abhängigkeit von t). Die Vielfachen rt einer festen reellen Zahl r können nur dann den gleichen Wert haben, wenn $r = 0$ ist, also gilt

$$0 = \alpha^2 a^2 t - \beta^2 b^2 t = (\alpha a - \beta b)(\alpha a + \beta b),$$

und auch

$$(*) \qquad -2\alpha^2 ax + 2\beta^2 by + c, \quad \text{also} \quad c = 2\alpha^2 ax - 2\beta^2 by.$$

Die letzte Gleichung zeigt: Wäre $a = 0 = b$, so wäre auch $c = 0$, aber $(a, b, c) \neq 0$. Wegen $(\alpha a - \beta b)(\alpha a + \beta b) = 0$ ist

$$\alpha a - \beta b = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha a + \beta b = 0.$$

In beiden Fällen folgt $a \neq 0$, denn sonst wäre auch $b = 0$, dies ist aber nicht möglich, wie wir schon wissen.

Mit (a, b, c) ist auch $\frac{1}{\alpha a}(a, b, c)$ Richtungsvektor der gegebenen Geraden, also können wir $a = \frac{1}{\alpha}$ setzen und erhalten dann $b = \frac{1}{\beta}$ oder $b = -\frac{1}{\beta}$. Durch $(*)$ erhalten wir $c = 2\alpha x - 2\beta y$ bzw. $c = 2\alpha x + 2\beta y$. Insgesamt sehen wir, dass es höchstens zwei Geraden durch (x, y, z) gegeben kann, die ganz in $V(P)$ liegen, und wir erhalten die genaue Beschreibung von Richtungsvektoren für diese Geraden.

Umgekehrt sieht man (mit den gleichen Rechnungen), dass diese beiden Geraden wirklich ganz in $V(P)$ liegen. Dies ist der eigentliche Beweis. Der Fall eines einschaligen Hyperboloids ist übungsaufgabe.

6.8. Zusatz: Das Hauptminoren-Kriterium für positive Definitheit.

Erinnerung: Eine quadratische Form q heißt positiv definit, falls $q(x) > 0$ für alle $x \neq 0$ gilt, sie heißt positiv semidefinit, falls $q(x) \geq 0$ gilt.

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Wir betrachten die Bilinearform $\langle x, y \rangle_A = x^t A y$. Es sei daran erinnert, daß jede reelle symmetrische Matrix diagonalisierbar ist, also genügend reelle Eigenwerte hat! *Genau dann ist $\langle -, - \rangle_A$ positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.* (Derartige Matrizen nennt man daher auch *positiv definite* Matrizen.)

Ist $A = (a_{ij})_{ij}$ eine $(n \times m)$-Matrix, so nennt man die Determinanten der Matrizen $A_t = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq t}$ die *Hauptminoren* der Matrix A (man betrachtet also die quadratischen $(t \times t)$-Matrizen, die aus A durch Streichen der Zeilen und Spalten mit Index echt größer als t entstehen).

Das Hauptminoren-Kriterium für Positivität. *Sei A eine reelle $(n \times n)$-Matrix. Genau dann ist die Bilinearform $\langle x, y \rangle_A$ positiv definit, wenn die Hauptminoren positiv sind.*

Beweis: Ist $\langle -, - \rangle_A$ positiv definit, so gibt es eine invertierbare Matrix P, so daß $P^t A P$ eine Diagonalmatrix ist; seien $d_1, \ldots, d_n$ die Diagonalkoeffizienten, dann ist $d_i > 0$ für alle i. Es ist $(\det P)^2 \det A = \det P^t A P = d_1 \cdots d_n > 0$, also auch $\det A > 0$. Bei der Bildung des Hauptminors $\det A_t$ betrachtet man die Einschränkung von $\langle -, - \rangle_A$ auf den Unterraum $L(e_1, \ldots, e_t)$. Da auch diese Einschränkung positiv definit ist, folgt $\det A_t > 0$.

Sei umgekehrt $\det A_t > 0$ für $1 \leq t \leq n$. Wir können annehmen (Induktion), daß A_{n-1} positiv definit ist. Also gibt es eine Matrix $P \in \mathrm{GL}((n-1), \mathbb{R})$, so daß $D = P^t A_{n-1} P$ eine Diagonalmatrix ist (mit positiven Diagonalkoeffizienten). Für unsere Matrix $A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & a \\ a^t & a' \end{bmatrix}$ mit $a \in M((n-1) \times 1, \mathbb{R})$ und $a' \in \mathbb{R}$ liefert dies:

$$B = \begin{bmatrix} P^t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n-1} & a \\ a^t & a' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & b \\ tb^t & b' \end{bmatrix},$$

dabei ist $b \in M((n-1)\times 1, \mathbb{R})$ und $b' \in \mathbb{R}$. Die rechte Matrix kann durch eine Scherung diagonalisiert werden, wir erhalten eine Diagonalmatrix $\begin{bmatrix} D & \\ & d \end{bmatrix}$. Es ist $\det A > 0$ positiv, also auch $\det B > 0$, demnach auch $\det D \cdot d = \det \begin{bmatrix} D & \\ & d \end{bmatrix} > 0$. Wegen $\det D > 0$ sehen wir, daß d positiv ist. Da alle Diagonalkoeffizienten von $\begin{bmatrix} D & \\ & d \end{bmatrix}$ positiv sind, ist $\langle -,- \rangle$ positiv definit.

Beispiel: Betrachte die folgende $(n \times n)$-Matrix

$$A(n) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(die Diagonalkoeffizienten sind 2, es ist $a_{i,i-1} = -1 = a_{i,i+1}$, alle anderen Koeffizienten sind Null). Behauptung: Es ist $\det A(n) = n+1$.

Beweis per Induktion. Für $n = 1$ handelt es sich um die (1×1)-Matrix $A(1) = [\,2\,]$. Für $n = 2$ ist offensichtlich $\det A(2) = 4 - 1 = 3$.

Für $n \geq 3$ berechnen wir die Zeilenentwicklung nach der letzten Zeile. Streichen wir die n-te Zeile und die $(n-1)$-te Spalte von A, so erhalten wir $A(n)_{n,n-1}$, streichen wir nun die $(n-1)$-te Zeile und die $(n-1)$-te Spalte von $A(n)_{n,n-1}$, so erhalten wir $(A(n))_{n,n-1})_{n-1,n-1} = A(n-2)$ und wir sehen:

$$\det A(n)_{n,n-1} = (-1)^{n-1+n-1} a_{n-1,n} \det A(n-2) = \det A(n-2) = n-1.$$

Streichen wir die n-te Zeile und die n-te Spalte von A, so erhalten wir $A(n)_{n,n} = A(n-1)$. Also

$$\det A(n) = -\det A(n)_{n,n-1} + 2 \det A(n)_{n,n} = (n-1) + 2n = n+1.$$

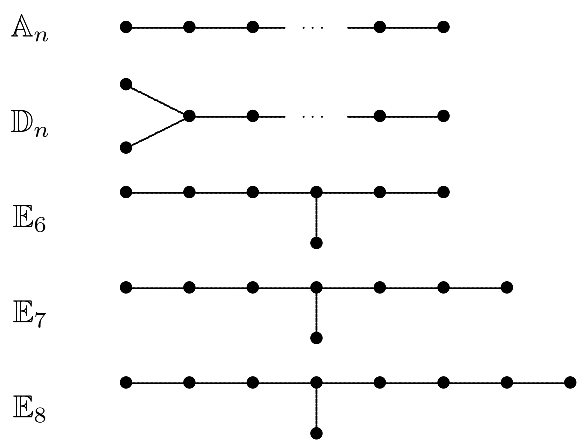
Wir sehen also: *Die Matrizen $A(n)$ sind positiv definit.*

Ausblick. Ist S eine Menge, so bezeichnen wir mit $\mathcal{P}_2(S)$ die Menge der zweielementigen Teilmengen von S.

Ein *Graph* $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ besteht aus einer Grundmenge Γ_0 (der Menge der *Ecken*) und einer Teilmenge $\Gamma_1 \subseteq \mathcal{P}_2(\Gamma_0)$. Ist $\{i,j\}$ in Γ_1, so nennt man dies eine *Kante* zwischen i und j. Der Graph Γ heißt *zusammenhängend,* falls es zu je zwei verschiedenen Ecken i,j eine Folge von Kanten $\{i_{s-1}, i_s\}$ mit $1 \leq s \leq t$ und $i_0 = i,\ i_t = j$ gibt.

Jedem endlichen Graphen Γ mit Punktmenge $\{1,2,\dots,n\}$ und Kantenmnege Γ_1 ordnen wir eine Matrix $A(\Gamma)$ zu: Sei $a_{ii} = 2$ für $1 \leq i \leq n$, sei $a_{ij} = a_{ji} = 1$, falls es eine Kante zwischen i und j gibt, und 0 sonst. Die im letzten Beispiel betrachtete Matrix $A(n)$ ist demnach die Matrix zum (weiter unten gezeigten) Graphen $\mathbb{A}_n$.

Für eine Vielzahl mathematischer Probleme spielt die Frage eine Rolle, für welche endliche Graphen Γ die Matrix $A(\Gamma)$ positiv definit (oder auch positiv semidefinit) ist. Es gilt: *Ist* Γ *ein zusammenhängender Graph, so ist* $A(\Gamma)$ *genau dann positiv definit, wenn* Γ *einer der folgenden Graphen ist:*



dabei hat jeder dieser Graphen $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_n$ genau n Ecken; man nennt sie die *Dynkin-Diagramme mit Einfachbindung.* (Es gibt noch weitere Dynkin-Diagramme $\mathbb{B}_n, \mathbb{C}_n, \mathbb{F}_4, \mathbb{G}_2$, auch ihnen ist jeweils eine positiv-definite Matrix zugeordnet).

7. Diskrete Bewegungsgruppen.

7.1. Isometrien des $\mathbb{R}^n$.

Wir betrachten hier den kanonischen euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^n, \langle -, - \rangle)$, mit der Abstandsfunktion $d(a,b) = ||a-b||$. Erinnerung: Eine Abbildung $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *Isometrie* (oder *Bewegung*), falls gilt:

$$d(\phi(a), \phi(b)) = d(a,b) \quad \text{für alle} \quad a, b \in \mathbb{R}^n,$$

dies sind die Abbildungen der Form $\phi = t_a \circ g$, dabei ist $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein orthogonaler Endomorphismus und $t_a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Translation um den Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ (also $t_a(x) = x + a$),) der orthogonale Endomorphismus g und der Vektor a sind durch ϕ eindeutig bestimmt. Ist $\det g = 1$, so nennt man ϕ eine *eigentliche* (oder *orientierungserhaltende*) Bewegung, sonst eine *uneigentliche* (oder *orientierungsumkehrende*) Bewegung.

Die Menge aller Isometrien bildet (bezüglich der Hintereinanderschaltung von Abbildungen) eine Gruppe $\mathcal{B}(n)$. Die Gruppe der orthogonalen Endomorphismen von $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(n)$; die der Translationen mit $\mathcal{T}(n)$. Ist $g \in \mathcal{O}(n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$, so gilt:

$$g \circ t_a = t_{g(a)} \circ g,$$

Die Zuordnung $t_a \circ g \mapsto g$ ist ein Gruppen-Homomorphismus

$$\eta\colon \mathcal{B}(n) \to \mathcal{O}(n)$$

mit Kern $\mathcal{T}(n)$ (Erinnerung: Der Kern eines Gruppen-Homomorphismus $\eta\colon G \to G'$ ist die Menge der $g \in G$ mit $\eta(g) = 1_G$, dies ist eine *Untergruppe.*) Die Gruppe $\mathcal{T}(n)$

der Translationen ist zur additiven Gruppe $(\mathbb{R}^n, +)$ isomorph (und zwar vermöge der Zuordnung $a \mapsto t_a$, für $a \in \mathbb{R}^n$), insbesondere ist sie kommutativ.

Sei $\phi \in \mathcal{B}(n)$. Man nennt $x \in \mathbb{R}^n$ Fixpunkt, falls $\phi(x) = x$ ist. Erinnerung: Genau dann ist $0 \in \mathbb{R}^n$ Fixpunkt von ϕ, wenn ϕ linear, also ein orthogonaler Endomorphismus, ist. Genau dann ist x ein Fixpunkt von ϕ, wenn $t_{-x}\phi t_x$ linear ist. Eine Fixgerade von ϕ ist eine Gerade $G \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\phi(G) = G$. Manchmal gibt es sogar Fixpunktgeraden (dann gilt $\phi(x) = x$ für jedes $x \in G$), aber Fixgeraden müssen keine Fixpunktgeraden sein.

Sei jetzt $n = 2$. Wir wollen die möglichen Bewegungen klassifizieren. Zu betrachten sind die **Translationen,** also die Abbildungen t_a mit $a \in \mathbb{R}^2$; ist $a \neq 0$, so besitzt t_a keinen Fixpunkt. Dann die **Drehungen** um einen Punkt a mit Winkel α; eine derartige Abbldung ist von der Form $t_a \circ g \circ t_{-a}$, dabei ist g eine Drehung in $\mathcal{O}(2)$ um den Winkel α.

Satz. 7.1.1. *Die Translationen und die Drehungen sind die orientierungserhaltenden Bewegungen.*

Beweis: Sei ϕ orientierungserhaltende Bewegung. Wir zeigen: *Ist ϕ keine Translation, so hat ϕ einen Fixpunkt.* Beweis: Sei $\phi = t_a \circ g$, dabei sei $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ und g sei Drehung um den Winkel $0 \leq \alpha < 2\pi$. Also ist

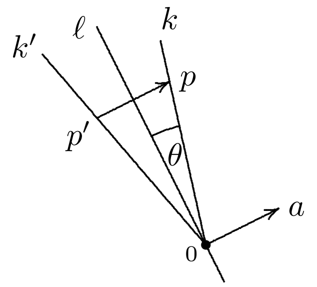
$$\phi(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

Um einen Fixpunkt zu erhalten, suchen wir also p_1, p_2 mit $\phi(\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$, also eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha - 1 & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix}.$$

Ist $\alpha \neq 0$, so ist die Koeffizientenmatrix regulär, also gibt es genau eine Lösung. (Die Determinante der Matrix ist $(\cos\alpha - 1)^2 + (\sin\alpha)^2 = -2\cos\alpha + 2 = 2(\cos\alpha - 1) \neq 0$ für $0 < \alpha < 2\pi$.)

Zusatz. Man kann diesen Fixpunkt folgendermaßen geometrisch konstruieren:



Die Gerade ℓ sei orthogonal zum Vektor a. Der Winkel zwischen den Geraden k und ℓ, wie auch zwischen ℓ und k' sei jeweils $\theta = \frac{1}{2}\alpha$. Verschiebe den Vektor a so, daß der

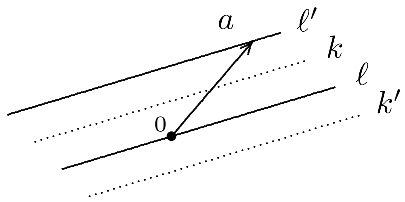
Anfangspunkt p' auf k', der Endpunkt p auf k zu liegen kommt. Die Drehung um den Winkel α bildet p auf p' ab, die Verschiebung t_a bildet p' auf p ab, also gilt: *p ist ein Fixpunkt von $t_a \circ g$.*

Folgerung: *Die Hintereinanderschaltung zweier Drehungen ist eine Drehung oder eine Translation.*

Nun betrachten wir orientierungsumkehrende Bewegungen. Zu jeder Geraden gibt es die **Spiegelung** an dieser Gerade; diese Gerade ist eine Fixpunktgerade dieser Abbildung. Schließlich gibt es **Gleitspiegelungen:** hier ist eine Gerade ℓ und ein Richtungsvektor $b \neq 0$ zu dieser Geraden gegeben, es ist also $\ell = \{a + \lambda b \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ für ein $a \in \mathbb{R}^2$. Die entsprechende Gleitspiegelung ist die Hintereinanderschaltung der Spiegelung an der Geraden ℓ mit der Translation um den Vektor b.

Satz 7.1.2. *Ist ϕ orientierungsumkehrend, so hat ϕ eine Fixgerade und ist Spiegelung oder Gleitspiegelung mit dieser Fixgeraden.*

Beweis:



Sei $\phi = t_a \circ g$ mit einer Spiegelung $g \in \mathcal{O}(2)$ und $a \in \mathbb{R}^2$. Sei L die Spiegelachse; sei ℓ' die Gerade durch a, parallel zu ℓ. Wir brauchen zwei weitere zu ℓ parallele Geraden k, k', nämlich diejenigen Geraden, für die die Abstände zwischen k' und ℓ, zwischen ℓ und k und zwischen k und ℓ' gleich groß sind. Dann ist k die gesuchte Fixgerade: denn unter der Spiegelung an der Geraden ℓ wird k auf k' abgebildet, unter der Translation t_a wird k' auf k abgebildet.

Wir müssen noch zeigen: *ϕ ist Spiegelung oder Gleitspiegelung.* Sei $\ell = \{\lambda b \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ mit $0 \neq b \in \mathbb{R}^2$. Zerlege $a = a' + \lambda b$ mit a' orthogonal zu b und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es ist $t_a = t_{\lambda b} \circ t_{a'}$. Man rechnet leicht nach, daß $t_{a'} \circ g$ die Spiegelung an der Geraden $k = \{\frac{1}{2}a' + \lambda b \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist. Demnach ist $t_a \circ g = t_{\lambda b} \circ (t_{a'} \circ g)$ die Hintereinanderschaltung dieser Spiegelung mit der Translation $t_{\lambda b}$, und der Verschiebungsvektor λb ist ein Vielfaches des Richtungsvektors b von ℓ. Ist $u = 0$, so ist ϕ eine Spiegelung, ist $\lambda \neq 0$, so ist ϕ eine Gleitspiegelung.

7.2. Diskrete Untergruppen von $\mathcal{T}(2)$.

Eine Untergruppe G von $\mathcal{T}(2)$ heißt *diskret,* wenn es ein $d > 0$ gibt, so daß folgendes gilt: Ist $0 \neq a \in \mathbb{R}^2$ mit $t_a \in G$, so ist $||a|| \geq d$ (es gibt also keine Translationen in G mit beliebig kleinem Translationsvektor).

Satz. *Sei G eine diskrete Untergruppe von $\mathcal{T}(2)$. Dann gibt es drei Möglichkeiten:*

(A) $G = \{1\}$.

(B) *Es gibt einen von Null verschiedenen Vektor $a \in \mathbb{R}^2$, so daß die Translationen in G gerade die Translationen der Form t_{za} mit $z \in \mathbb{Z}$ sind.*

(C) *Es gibt zwei linear unabhängige Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$, so daß die Translationen in G gerade die Translationen der Form t_c mit $c = za + z'b$ und $z, z' \in \mathbb{Z}$ sind.*