Beweis. Setze

$$L = \{a \in \mathbb{R}^2 \mid t_a \in G\}.$$

Dies ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R}^2, +)$, denn $t_a + t_b = t_{a+b}$ und $t_{-a} = (t_a)^{-1}$.

Wir setzen voraus, dass G Translationen t_a mit $a \neq 0$ enthält, dass also $L \neq 0$ ist.

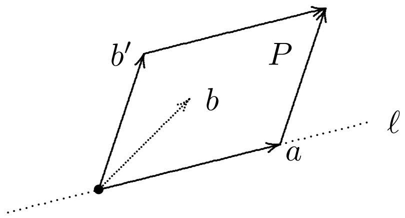
(1) *Es gibt in L einen kürzesten von Null verschiedenen Vektor a* (das heißt: einerseits ist $0 \neq a \in L$, andererseits gilt: ist $0 \neq b \in L$, so ist $||a|| \leq ||b||$; ein derartiger Vektor a ist keineswegs eindeutig bestimmt; weiter unten wird gezeigt, welche Möglichkeiten es gibt). Beweis: Sei $b \neq 0$ ein beliebiger von Null verschiedener Vektor. Betrachte die Menge L' aller Vektoren $c \in L$ mit $||c|| \leq ||b||$. Dies ist eine beschränkte Menge in der Ebene. Wäre L' unendlich, so gäbe es in L' einen Häufungspunkt (nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass), insbesondere gäbe es also in L' Punkte $c \neq c'$ mit $d(c, c') < \epsilon$. Aber $d(c, c') = ||c - c'||$ und mit $c, c' \in L$ liegt auch $c - c' \in L$ (und ist von Null verschieden). Widerspruch zur Voraussetzung, dass G eine diskrete Gruppe ist.

(2) Sei nun a ein kürzester von Null verschiedener Vektor in L. *Ist $\gamma a \in L$, so ist $\gamma \in \mathbb{Z}$.* (Es ist also $L \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}a$.) Beweis: Sei $b \in L$, und $b = \gamma a$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$. Schreibe $\gamma = z + \gamma'$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq \gamma' < 1$. Dann ist auch $\gamma' a = b - za \in L$ und es ist $||\gamma' a|| < ||a||$. Wegen der Minimalität der Länge von a folgt $\gamma' a = 0$, also $b = za$. Wir sehen: Jeder Vektor in $L \cap \mathbb{R}a$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von a.

(3) Es folgt: Ist $G \subseteq \{t_x \mid x \in \mathbb{R}a\}$, so liegt der Fall (B) vor.

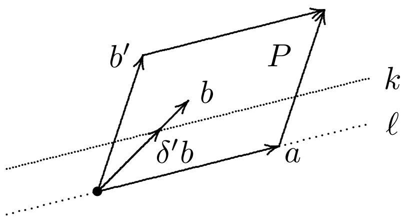
Wir setzen nun voraus, dass es einen Vektor b' in L gibt, so dass a, b' linear unabhängig sind. Wir zeigen:

(4) *Es gibt einen Vektor $b \in L$, der nicht zu $\mathbb{R}a$ gehört, und einen kürzest möglichen Abstand von der Geraden $\mathbb{R}a$ hat.* Betrachte das von a und b' aufgespannte Parallelogramm P. In diesem Parallelogramm gibt es nur endlich viele Vektoren, die zu L gehören (wieder wegen Bolzano-Weierstraß und der Diskretheit von G), wähle also in P einen Vektor b, der nicht auf der Ursprungsgeraden ℓ durch a liegt, aber zu dieser Geraden den kürzesten Abstand hat.



(5) *Jeder Vektor in L ist ganzzahlige Linearkombination von a und b.* Beweis: Sei c ein beliebiger Vektor in L. Da a, b eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist, können wir $c = \gamma a + \delta b$ schreiben, mit $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Sei $\delta = z + \delta'$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq \delta' < 1$. Mit b, c liegt auch $c - zb = \gamma a + \delta' b$ in L. Dieser Punkt hat einen kürzeren Abstand von ℓ als b, das gleiche gilt für alle Punkte der Form $p(z') = c - zb + z'a$ mit $z' \in \mathbb{Z}$, sie liegen auf der Geraden k, die parallel zu ℓ

verläuft und durch den Punkt $\delta' b$ geht.



Diese Punkte $p(z')$ mit $z' \in \mathbb{Z}$ liegen im Abstand $||a||$ auf der Geraden k, insbesondere muss also einer dieser Punkte im Parallelogramm P liegen. Da dieser Punkt einen kürzeren Abstand von ℓ hat und zu L gehört, sehen wir, dass $\delta' = 0$ gelten muss. Es ist also $c - zb = \gamma a$ ein reelles Vielfaches von a. Wir wissen aber schon, dass reelle Vielfache von a, die zu L gehören, ganzzahlige Vielfache von a sein müssen. Dies zeigt, dass c eine ganzzahlige Linearkombination von a und b ist. Wir sind also im Fall (C).

Insgesamt haben wir gezeigt, dass nur die drei Fälle (A),(B),(C) auftreten können.

7.3. Symmetriegruppen.

Ist X eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, so nennt man die Menge $\mathrm{Sym}(X)$ der $\phi \in \mathcal{B}(n)$ mit $\phi(X) = X$ die *Symmetriegruppe* von X, offensichtlich ist dies eine Untergruppe von $\mathcal{B}(n)$. Würde man hier nur $\phi(X) \subseteq X$ verlangen, so erhielte man keine Untergruppe; Beispiel: Sei $n = 1$ und $X = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. (Es ist $\mathrm{Sym}(\mathbb{N}) = \{1\}$, aber jede Verschiebung t_a mit $a \in \mathbb{N}$ bildet $\mathbb{N}$ in sich ab.) Es gilt aber:

Lemma 7.3.1. *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\phi \in \mathcal{B}(n)$ mit $\phi(X) \subseteq X$.*
(a) *Ist X endlich, so ist $\phi(X) = X$.*
(b) *Ist neben $\phi(X) \subseteq X$ auch $\phi^{-1}(X) \subseteq X$, so ist $\phi(X) = X$.*

Beweis: (a) Da ϕ bijektiv ist, hat $\phi(X)$ die gleiche Kardinalität wie X; aus $\phi(X) \subseteq X$ folgt demnach die Gleichheit.

(b) Sei $x \in X$ und $y = \phi^{-1}(x)$ Wegen $\phi^{-1}(X) \subseteq X$ ist $y \in X$ und es ist $x = \phi\phi^{-1}(x) = \phi(y)$, also $x \in \phi(X)$.

Die eigentlichen Bewegungen in $\mathrm{Sym}(X)$ bilden eine Untergruppe, die mit $\mathrm{Sym}_+(X)$ bezeichnet werde.

7.3.2. Folgerung. *Sei G eine Untergruppe von $\mathcal{B}(n)$, sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $g(X) \subseteq X$ für alle $g \in G$. Dann ist $g(X) = X$ für alle $g \in G$.*

Beweis: Dies folgt direkt aus 7.3.1.(b), denn ist $g \in G$, so ist auch $g^{-1} \in G$.

Ist G eine Untergruppe von $\mathcal{B}(n)$, und $X \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $g(X) = X$ für alle $g \in G$, so nennt man X eine G-invariante Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Für $n \geq 2$ betrachten wir das regelmäßige n-Eck

$$X_n = \{e^{s2\pi i/n} \mid 0 \leq s < n\} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2.$$

Die volle Symmetriegruppe von X_n wollen wir mit $\mathcal{D}_n = \mathrm{Sym}(X_n)$ bezeichnen, Man nennt die Gruppe $\mathcal{D}_n$ eine *Diedergruppe.* Die menge $\mathrm{Sym}_+(X_n)$ der Dregungen in $\mathrm{Sym}(X_n)$ nennt man die *Drehgruppe* des regelmäßigen n-Ecks. Die Gruppe $\mathcal{C}_n$ enthält die n Drehungen mit den Drehwinkeln $\frac{s2\pi}{n}$ mit $0 \leq s < n$. Bezeichnen wir mit g die Drehung mit Winkel $2\pi/n$, so gilt

$$\mathcal{C}_n = \{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}\},$$

die Elemente $1, g, g^2, \dots, g^{n-1}$ sind paarweise verschieden und es ist $g^n = 1$. Bei den Elementen in $\mathcal{D}_n \setminus \mathcal{C}_n$ handelt es sich gerade um n Spiegelungen. Alle diese Gruppen sind Untergruppen von $\mathcal{O}(2)$. Für $n = 1$ definieren wir entsprechend Untergruppen von $\mathcal{O}(2)$ wie folgt: wir setzen $\mathcal{C}_1 = \{1\}$ und $\mathcal{D}_1 = \{1, \sigma\}$, dabei ist σ die Spiegelung an der x-Achse (also $\sigma = S(0)$). Ganz allgemein gilt dann für $n \geq 1$: Die Drehgruppe $\mathcal{C}_n$ hat die Kardinalität n, die Diedergruppe $\mathcal{D}_n$ die Kardinalitüt $2n$.

Matrizen-Formulierung: $\mathcal{C}_n$ besteht aus den Matrizen

$$D(\alpha) \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{s2\pi}{n} \quad \text{und} \quad 0 \leq s < n.$$

Die Untergruppe $\mathcal{D}_n$ enthält zusätzlich die Matrizen

$$S(\alpha) \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{s2\pi}{n} \quad \text{und} \quad 0 \leq s < n.$$

Die Drehgruppen $\mathcal{C}_n$ sind kommutativ, die Diedergruppen $\mathcal{D}_n$ sind für $n \geq 3$ nicht-kommutativ.

Hier noch einmal die Spezialfälle $n = 1$ und $n = 2$. Die Gruppe $\mathcal{C}_1$ besteht nur aus der Identität in $\mathcal{O}(2)$. Die Drehgruppe $\mathcal{C}_2$ enthält zusätzlich die Drehung mit Winkel π. Die Diedergruppe $\mathcal{D}_1$ enthält neben der Identität die Spiegelung an der x-Achse; und $\mathcal{D}_2$ enthält neben den Elementen von $\mathcal{C}_2$ die Spiegelungen an der Koordinatenachsen. Man beachte: Die Gruppen $\mathcal{C}_2$ und $\mathcal{D}_1$ sind isomorph (beides sind Gruppen der Kardinalität 2, und alle Gruppen der Kardinalität 2 sind isomorph). Als Untergruppen von $\mathcal{O}(2)$ sind aber $\mathcal{C}_2$ und $\mathcal{D}_1$ unterscheidbar: das Element $g \neq 1$ in $\mathcal{C}_2$ ist eine Drehung, also $\det g = 1$; das Element $h \neq 1$ in $\mathcal{D}_1$ ist eine Spiegelung, also $\det h = -1$.

7.4. Endliche Untergruppen von $\mathcal{B}(2)$.

Satz 7.4.1. *Gibt es eine endliche G-invariante Teilmenge, so gibt es einen Fixpunkt.* (Nach Verschiebung des Koordinatensystems kann man dann voraussetzen $G \subseteq \mathcal{O}(2)$.)

Seien $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^2$ paarweise verschieden, sei $X = \{x_1, \dots, x_m\}$. Man nennt $s(X) = \frac{1}{m}\sum x_i$ den *Schwerpunkt* (er hängt offensichtlich nur von der Menge X, nicht aber von der Reihenfolge von $x_1, \dots, x_m$ ab).

Lemma. Für jede Bewegung ϕ gilt: $\phi(s(X)) = s(\phi(X))$.

Beweis: Da sich ϕ als Hintereinanderschaltung einer Translation und einer orthogonalen Abbildung schreiben lässt, reicht es, den Fall einer Translation und den einer orthogonalen Abbildung zu betrachten. Ist $\phi = t_a$, so gilt

$$\begin{aligned} t_a(s(X) &= a + (s(X)) = a + \tfrac{1}{m}\sum x_i \\ &= \tfrac{1}{m}\sum(a+x_i) = s(x_1+a,\ldots,x_m+a) = s(t_a(X)). \end{aligned}$$

Ist ϕ eine orthonale Abbildung, so ist ϕ insbesondere linear, also ist

$$\phi(s(X)) = \phi(\tfrac{1}{m}\sum x_i) = \tfrac{1}{m}\sum \phi(x_i) = s(\phi(X)).$$

Beweis von Satz 7.4.1. Sei X endliche G-invariante Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Für jedes $g \in G$ ist $g(X) = X$, also ist $s(g(X)) = s(X)$. Andererseits besagt das Lemma: $g(s(X)) = s(g(X))$. Dies zeigt, dass $s(X)$ ein Fixpunkt ist.

Folgerung. *Eine endliche Untergruppe G von $\mathcal{B}(2)$ besitzt einen Fixpunkt.*

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Bilde $X = \{g(x) \mid g \in G\}$. Da G endliche Gruppe ist, ist dies eine endliche Menge. Offensichtlich ist diese Menge auch G-invariant: denn ist $g(x) \in X$ mit $g \in G$, und ist $h \in G$, so ist $h(g(x)) = (hg)(x)$ wieder in X.

7.4.2. Einschub: Die Ordnung eines Elements einer Gruppe G. Sei $(G, \cdot)$ Gruppe und $g \in G$. Ist $g^n = 1$ für eine natürliche Zahl $n \geq 1$, so nennt man die kleinste derartige Zahl n die *Ordnung* von g; gibt es kein solches n, so sagt man, die Ordnung von g ist *unendlich.* Ist die Ordnung von g gleich $n \in \mathbb{N}$, so ist die Menge $\{1, g, \ldots, g^{n-1}\}$ eine Menge der Kardinalität n und zwar eine Untergruppe von G.

Beispiel: Eine Drehung der Ebene mit Winkel $\frac{2\pi}{n}$ hat offensichtlich die Ordnung n, jede Spiegelung hat die Ordnung 2.

Satz 7.4.3. *Sei G eine Untergruppe von $\mathcal{O}(2)$.*

(a) *Ist G endlich und enthält G keine Spiegelung, so gilt $G = \mathcal{C}_n$ für ein n.*

(b) *Enthält G eine Spiegelung σ, und ist $G \cap \mathcal{O}_+(2) = \mathcal{C}_n$, so enthält G genau n Spiegelungen, nämlich die Spiegelungen σg mit $g \in \mathcal{C}_n$. In diesem Fall ist G isomorph zu $\mathcal{D}_n$.*

Anmerkung. $\mathcal{C}_n$ ist die **eindeutig bestimmte** Untergruppe G von $\mathcal{O}(2)$ der Kardinalität $|G|$, die nur Drehungen enthält. Dagegen gibt es **viele** Untergruppen in $\mathcal{O}(2)$ der Kardinalität $2n$, die n Spiegelungen enthalten — erst wenn man eine Spiegelachse ℓ fixiert, erhält man eine eindeutig bestimmte Untergruppe. Es handelt sich dabei um die vollen Symmetriegruppen der regelmäßigen n-Ecke aus Einheitsvektoren. Man sieht auf diese Weise aber, dass alle diese Gruppen zumindest zueinander isomorph sind, denn ganz allgemein gilt: *Ist $\phi \in \mathcal{B}(n)$ und $X \subseteq \mathbb{R}^n$, so sind die Gruppen* $\mathrm{Sym}(X)$ *und* $\mathrm{Sym}(\phi(X))$

isomorph, einen Gruppen-Isomorphismus $\eta\colon \mathrm{Sym}(X) \to \mathrm{Sym}(\phi(X))$ erhält man durch $\eta(g) = \phi \circ g \circ \phi^{-1}$. (Für ϕ nehme man eine Drehung, die ℓ auf die x-Achse abbildet.)

Beweis von Satz 7.4.3: Sei G eine endliche Untergruppe von $\mathcal{O}(n)$. Gibt es in G keine echte Drehung, so gibt es in G höchstens eine Spiegelung, denn die Hintereinanderschaltung zweier Spiegelungen ist eine Drehung. Also ist G entweder gleich $\mathcal{C}_1 = \{1\}$ oder von der Form $\{1, \sigma\}$ mit σ Spiegelung an einer Ursprungsgeraden.

Wir setzen nun voraus, dass es in G echte Drehungen gibt. Wähle eine Drehung $D(\alpha)$ in G mit $0 < \alpha < 2\pi$ minimal (da es nur endlich viele Drehungen in G gibt, kann man α minimal wählen). Wir behaupten: *Jede Drehung in G ist eine Potenz von $D(\alpha)$.* Sei also $D(\beta)$ eine Drehung, die zu G gehört. Schreibe $\beta = z\alpha + \gamma$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $0 \le \gamma < \alpha$ (dies ist möglich, denn jede reelle Zahl liegt in einem der Intervalle $[z\alpha, (z+1)\alpha[$ mit $z \in \mathbb{Z}$). Dann ist $D(\gamma) = D(\alpha)^{-z} D(\beta)$ und liegt demnach in G. Wegen der Minimalität von α folgt $\gamma = 0$, also ist $D(\beta) = D(\alpha)^z$. Und wir zeigen: *Es ist $\alpha = 2\pi/n$ für eine natürliche Zahl n.* Sei nämlich n minimal mit $n\alpha \ge 2\pi$. Schreibe $n\alpha = 2\pi + \delta$. Wegen der Minimalität von n ist $0 \le \delta < \alpha$. Wieder sehen wir, dass $D(\delta)$ zu G gehört, und demnach muss $\delta = 0$ gelten, also ist $n\alpha = 2\pi$. Besteht also G nur aus Drehungen, so sehen wir $G = \mathcal{C}_n$.

Jetzt setzen wir voraus, dass es in G auch eine Spiegelung σ gibt. Dann sind die n Elemente der Form $\sigma D(\alpha)^i$ mit $0 \le i < n$ paarweise verschiedene Spiegelungen in G. Man erhält auf diese Weise alle Spiegelungen in G: denn sst σ' eine Spiegelung in G, so ist $\sigma\sigma'$ eine Drehung in G, also von der Form $D(\alpha)^i$ mit $0 \le i < n$; aus $\sigma\sigma' = D(\alpha)^i$ folgt aber durch Linksmultiplikation mit σ dass $\sigma' = \sigma D(\alpha)^i$ gilt (denn $\sigma^2 = 1$).

7.5. Die Punktgruppe $\overline{G}$. Sei $G \subseteq \mathcal{B}(2)$. Erinnert sei daran, dass wir einen Gruppenhomomorphismus $\eta\colon \mathcal{B}(2) \to \mathcal{O}(2)$ definiert haben, dabei ist $\eta(t_a \circ g) = g$ falls $a \in \mathbb{R}^2$ und $g \in \mathcal{O}(2)$. Wir schreiben $\overline{G} = \eta(G)$ und nennen dies die *Punktgruppe* zu G. Beachte: $\overline{G}$ ist das Bild eines Gruppenhomomorphismus (nämlich der Hintereinanderschaltung der Inklusionsabbildung $G \to \mathcal{B}(2)$ und η), und demnach eine Untergruppe von $\mathcal{O}(2)$.

7.5.1. Wichtig. Die Klassifikation der Isometrien der Ebene zeigt: Sei ϕ eine Isometrie der Ebene. *Ist $\eta(\phi) = D(\alpha)$, so ist ϕ eine Drehung um den Winkel α* (das Zentrum kann ein beliebiger Punkt der Ebene sein). *Ist $\eta(\phi) = s_\alpha$ und ist ℓ die Spiegelachse von $S(\alpha)$, so ist ϕ eine Spiegelung oder Gleitspiegelung, deren Achse parallel zu ℓ ist* (hier kann die Achse eine beliebige Gerade parallel zu ℓ sein, entsprechend kann der Verschiebungsvektor ein beliebiger Richtungsvektor der Geraden ℓ sein).

Vergleicht man die Ordnung eines Elements $\phi \in \mathcal{B}(2)$ und seines Bilds $\eta(\phi)$ in $\mathcal{O}(2)$, so ergibt sich folgendes: Ist ϕ eine Translation, so ist $\eta(\phi) = 1$, dagegen hat eine Translation t_a mit $a \neq 0$ immer unendliche Ordnung. Ist $\phi = t_a \circ g \circ t_{-a}$ eine Drehung um den Punkt a, so ist $\eta(\phi) = g$; insbesondere gilt: Die Ordnung von ϕ in der Gruppe $\mathcal{B}(2)$ ist gleich der Ordnung von $\eta(\phi)$ in $\mathcal{O}(2)$. Ist ϕ eine Spiegelung, so ist die Ordnung von ϕ wie von $\eta(\phi)$ gleich 2. Ist ϕ eine Gleitspiegelung, so hat ϕ unendliche Ordnung, während $\eta(\phi)$ eine Spiegelung ist, also Ordnung 2 hat.

Warnung. In vielen Beispielen ist $\overline{G}$ isomorph zu einer Untergruppe von G; im allgemeinen ist dies aber **nicht** der Fall. Enthält $\overline{G}$ eine Drehung der Ordnung n, so muss auch G eine Drehung der Ordnung n enthalten. Enthält dagegen $\overline{G}$ eine Spiegelung σ, so braucht G keine Spiegelung enthalten: man weiß lediglich, dass G entweder eine Spiegelung oder eine echte Gleitspiegelung enthält.

7.5.2. Satz. *Sei G eine Untergruppe von $\mathcal{B}(2)$ und $L = G \cap \mathcal{T}(2)$. Dann ist $\overline{G} \subseteq$* $\mathrm{Sym}(L)$.

Beweis: Wegen 7.3.2 reicht es zu zeigen, dass für $\phi \in G$ gilt: $(\eta(\phi))(L) \subseteq L$. Ist also $x \in L$, so müssen wir zeigen, dass $(\eta(\phi))(x) \in L$ gilt.

Sei $g = \eta(\phi)$, also $\phi = t_u \circ g$ für ein $u \in \mathbb{R}^2$. Um $g(x) \in L$ zu zeigen, müssen wir nachweisen, dass $t_{g(x)}$ zu G gehört. Es ist $\phi^{-1} = g^{-1} \circ (t_u)^{-1}$ und $(t_u)^{-1} = t_{-u}$. Beachte: $g \circ t_x = t_{g(x)} \circ g$. Wir zeigen: $\phi \circ t_x \circ \phi^{-1} = t_{g(x)}$:

$$\begin{aligned}\phi \circ t_x \circ \phi^{-1} &= t_u \circ g \circ t_x \circ g^{-1} \circ t_{-u}\\ &= t_u \circ t_{g(x)} \circ g \circ g^{-1} \circ t_{-u}\\ &= t_u \circ t_{g(x)} \circ t_{-u} = t_{g(x)}.\end{aligned}$$

Mit ϕ und t_x liegt auch $\phi \circ t_x \circ \phi^{-1}$ in G, also sehen wir $t_{g(x)} \in G$, also $g(x) \in L$.

Wir betrachten nun Untergruppen $G \subseteq \mathcal{B}(2)$, sodass $G \cap T(2)$ eine diskrete Untergruppe der Translationsgruppe $\mathcal{T}(2)$ ist. Nach Satz 7.2 sind drei Fälle zu unterscheiden.

Fall (A): $G \cap T(2) = \{1\}$. In diesem interessiert man sich besonders für den Fall, dass G eine endliche Gruppe ist. Die möglichen Gruppen G wurden im Abschnitt 7.3 klassifiziert.

Fall (B): Es gibt $0 \neq a \in \mathbb{R}^2$ mit $G \cap T(2) = \{t_{za} \mid z \in \mathbb{Z}\}$. In diesem Fall nennt man G eine *Friesgruppe.* Wir werden diese Gruppen im Abschnitt 7.4 beschreiben.

Fall (C): Es gibt linear unabhängige Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$, sodass $G \cap T(2) = \{t_{za+z'b} \mid z, z' \in \mathbb{Z}\}$ gilt. In diesem Fall nennt man G eine *ebene Kristallgruppe.*

7.6. Die Friesgruppen. Sei G eine Untergruppe von $\mathcal{B}(2)$. Es gebe einen von Null verschiedenen Vektor $a \in \mathbb{R}^2$ so dass die Translationen in G gerade die Translationen der Form t_{za} mit $z \in \mathbb{Z}$ sind. Durch Drehung des Koordinatensystems können wir erreichen, dass $\mathbb{R}a$ die x-Achse ist. Durch Strecken oder Stauchen der Ebene können wir erreichen, $||a|| = 1$ gilt. Durch Drehen des Koordinatensystems kann man schließlich erreichen, dass $a = [1, 0]^t$ gilt.

Lemma. *Die Punktgruppe $\overline{G}$ ist eine der Gruppen $\mathcal{C}_n, \mathcal{D}_n$ mit $n = 1$ oder 2.*

Beweis: Sei g eine Drehung in $\overline{G}$ der Ordnung n. Es ist $g(a) \in L$, also kann $g(a)$ nur a oder $-a$ sein, g ist also eine Drehung der Ordnung 1 oder 2. Demnach ist $\overline{G}$ entweder $\mathcal{C}_1$ oder $\mathcal{C}_2$ oder eine Diedergruppe $\mathcal{D}_1$ oder $\mathcal{D}_2$.

Satz. *Es gibt 7 wesentlich verschiedene Friesgruppen.*

Zum Beweis betrachtet man die verschiedenen Möglichkeiten für die zugeordnete Punktgruppe $\overline{G}$.

7.7. Die kristallographische Bedingung.

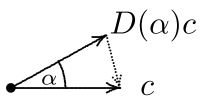
Seien a, b linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^2$ und $L = \{za + z'b \mid z, z' \in \mathbb{Z}\}$.

Satz. *Ist $g \in \mathcal{O}(2)$ eine Drehung mit $g(L) = L$, so ist die Ordnung von g gleich $1, 2, 3, 4$ oder 6.*

Man beachte: Drehungen der Ordnung 5 (und solche mit Ordnung $n \geq 7$) sind also ausgeschlossen (man nennt dies die **kristallographische Bedingung**).

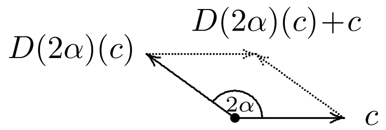
Beweis: Sei X die Menge der kürzesten von Null verschiedenen Vektoren in L. Mit $x \in X$ ist auch $g(x) \in X$. Sei $c \in X$.

Sei $g = D(\alpha)$ mit $0 \leq \alpha < 2\pi$. Angenommen $0 < \alpha < \frac{1}{3}\pi$. Dann ist mit c und $D(\alpha)c$ auch $D(\alpha)c - c$ ein von Null verschiedener Vektor in L, aber dessen Länge ist kürzer als die von c. Unmöglich.



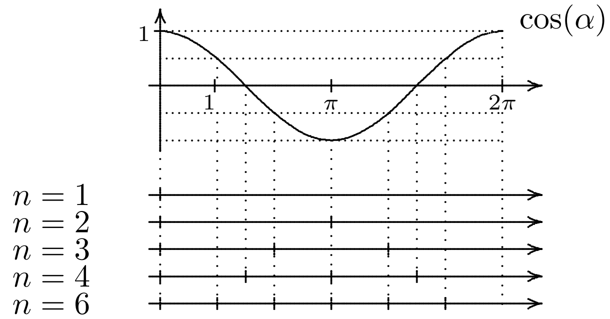
Wir sehen also: die Winkel zwischen zwei Punkten $c, c' \in X$ sind mindestens $\frac{1}{3}\pi$, demnach $|X| \leq 6$ und für $g = D(\alpha)$ gilt: α ist ein ganzzahliges Vielfache von $\frac{2\pi}{n}$ mit $n \leq 6$.

Ist $n = 5$, so betrachten wir $D(2\alpha)$. Auch diese Drehung gehört zu G und demnach $D(2\alpha)(c)$ zu L. Aber $D(2\alpha)(c) + c$ hat kürzere Länge als c. Ebenfalls unmöglich.



Umformulierung des Beweises. Wir haben gezeigt: gibt es eine Drehung g mit Drehwinkel $0 < \alpha < \pi$ und $g(L) = L$, so ist die Menge X der kürzesten von Null verschiedenen Vektoren in$L$ ein regelmäßiges m-Eck, mit $m = 2,\ 4$ oder 6 ist (da mit jedem $x \in X$ auch $-x \in X$ gilt, muss die Kardinalität von X eine gerade Zahl sein). Daraus kann man wieder folgern: Ist $g \in \mathcal{O}(2)$ eine Drehung mit $g(L) = L$, so gilt natürlich $g(X) \subseteq X$, also $g(X) = X$, und dies zeigt, dass die Ordnung von g nur $1, 2, 3, 4$ oder 6 sein kann.

Zweiter Beweis. Sei $g \in \mathcal{O}(2)$ eine Drehung um den Winkel α, also $g = D(\alpha)$. Nach Voraussetzung bildet g das Gitter $L = \{za + z'b \mid z, z' \in \mathbb{Z}\}$ in sich ab. Sei $g(a) = z_{11}a + z_{21}b$, und $g(b) = z_{12}a + z_{22}b$, dann ist also $A = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$ die Matrix-Darstellung der Drehung g bezüglich der Basis a, b. Insbesondere sehen wir, dass die Matrizen $D(\alpha)$ und A ähnlich sind. Ähnliche Matrizen haben die gleiche Spur. Die Spur von A ist $z_{11}+z_{22}$, also eine ganze Zahl, die von $D(\alpha)$ ist $2\cos(\alpha)$. Also sehen wir: $2\cos(\alpha) \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt aber $\alpha = \frac{s2\pi}{n}$ mit $0 \leq s < n$ und $n = 1, 2, 3, 4$ oder 6. Hier zur Verdeutlichung der Graph des Cosinus und für $n = 1, 2, 3, 4$ und 6 die Position der Zahlen $\frac{s2\pi}{n}$ mit $0 \leq s < n$ auf der Zahlengerade



Die kristallographische Bedingung entspricht der Bedingung

$$2\cos(\alpha) \in \mathbb{Z}.$$

Wir betrachten nun wieder Untergruppen $G \subseteq \mathcal{B}(2)$, sodass $G \cap T(2)$ eine diskrete Untergruppe der Translationsgruppe $\mathcal{T}(2)$ ist. Nach Satz 7.2 waren drei Fälle zu unterscheiden, hier ist es der Fall (C), der uns interessiert, also der einer ebenen Kristallgruppe: Es ist also G eine Untergruppe von $\mathcal{B}(2)$, und es gibt zwei linear unabhängige Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$, so dass die Translationen in G gerade die Translationen der Form t_c mit $c = za + z'b$ und $z, z' \in \mathbb{Z}$ sind.

Satz. *Die Punktgruppe $\overline{G}$ ist isomorph zu einer der Gruppen $\mathcal{C}_n, \mathcal{D}_n$ mit $n = 1, 2, 3, 4, 6$.*

Beweis. Nach 7.5.2 wissen wir: $\overline{G} \subseteq \mathrm{Sym}(L) \cap \mathcal{O}(2)$, also hat jede Drehung in $\overline{G}$ die Ordnung $1, 2, 3, 4$ oder 6. Die Behauptung folgt nun aus Satz 7.4.3.

7.8. Die ebenen Kristallgruppen.

Satz (Schoenfließ (1891), Fedorow (1892)) *Es gibt genau* 17 *Typen ebener Kristallgruppen.*

Es gibt auch ein entsprechendes Ergebnis im 3-dimensionalen Raum: Es gibt genau 230 Typen räumlicher Kristallgruppen, auch dieses Ergebnis stammt von A.Schoenfließ und E.S.Fedorow.

Um ebene Bewegungsgruppen G skizzenhaft zu beschreiben, verwendet man folgende Symbole: Wir markieren in der Ebene alle Zentren nicht-trivialer Drehungen, die zu G gehören, als Kreise $\circ$; so weit notwendig, notieren wir die Ordnung der Drehung: wir ersetzen $\circ$ durch eine der Zahlen $3, 4, 6$; im Fall der Ordnung 2 markieren wir das Zentrum einfach als schwarzen Punkt $\bullet$. Spiegelachsen zeichnen wir durchgezogen, Gleitspiegelachsen punktiert. Manchmal wird bei Gleitspiegelungen auch ein Verschiebungsvektor gestrichelt eingefügt:

Im Fall einer ebenen Kristallgruppe geben wir jeweils zwei Vektoren a, b an, so dass die Translationsuntergruppe von G durch t_a, t_b erzeugt wird, etwa . Grundsätzlich müsste man zu jeder Gleitspiegelachse die Länge eines zugehörigen Verschiebungsvektors c notieren. Darauf kann aber bei den ebenen Kristallgruppen verzichtet werden: Sei ϕ eine Gleitspiegelung, deren Achse keine Spiegelachse ist, sei c der Verschiebungsvektor. Da ϕ^2 eine Translation ist, ist $2c$ in L, also $2c = za + z'b$ mit $z, z' \in \mathbb{Z}$. Dabei gibt es immer eine Gleitspiegelung, bei der z, z' teilerfremd sind (mindestens eine der Zahlen z, z' muss ungerade sein, denn sonst wäre $c \in L$; besitzen z, z' einen echten ungeraden Teiler, so schalte man eine geeignete Translation hinter ϕ).

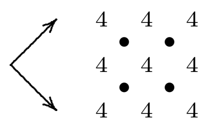
Zu untersuchen sind nun die möglichen Fälle:

- Es gibt keine echten Drehungen (also $\overline{G} = \mathcal{C}_1$ oder $\mathcal{D}_1$).
- Es gibt eine Drehung der Ordnung 2 und jede Drehung hat Ordnung 1 oder 2 (also $\overline{G} = \mathcal{C}_2$ oder $\mathcal{D}_2$).
- Es gibt eine Drehung der Ordnung 4 (also $\overline{G} = \mathcal{C}_4$ oder $\mathcal{D}_4$).
- Es gibt eine Drehung der Ordnung 3, aber keine Drehung der Ordnung 6 (also $\overline{G} = \mathcal{C}_3$ oder $\mathcal{D}_6$).
- Es gibt eine Drehung der Ordnung 6 (also $\overline{G} = \mathcal{C}_6$ oder $\mathcal{D}_6$).

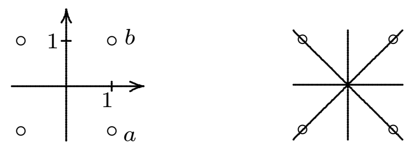
Wir diskutieren hier nur einen einziger Fall; die anderen Fälle sind ähnlich, manche sogar einfacher:

Ebene Kristallgruppen mit einer Drehung der Ordnung 4. Sei G eine ebene Kristallgruppen mit einer Drehung der Ordnung 4. Wir verwenden ein Koordinatensystem, in dem der Ursprung 0 und der kanonische Basisvektor $e_1 = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$ Zentren von Viererdrehungen sind. Wir können annehmen, dass der Abstand von je zwei Zentren von Viererdrehungen mindestens 1 ist. Es folgt, dass die Zentren der Viererdrehungen gerade die Menge $\mathbb{Z}^2$ bilden. Sei d_0 die Drehung um den ursprung mit Winkel $\pi/2$ und d_1 die entsprechende Drehung mit Zentrum e_1.

Es ist $d_0 d_1$ Zweierdrehung mit Zentrum $\frac{1}{2}(e_1 + e_2)$ (nachrechnen) und demnach ist $t = (d_0 d_1) d_0^2$ als Hintereinanderschaltung zweier Zweierdrehungen eine Translation, und zwar mit dem Verschiebungsvektor $b = e_1 + e_2$, entsprechend ist $t' = d_1^2 (d_0 d_1)$ Translation mit Verschiebungsvektor $a = e_1 - e_2$. Beachte: Die Translation t_{e_1} kann nicht zu G gehören, denn es ist $d_1 t_{e_1}$ Viererdrehung mit Zentrum $\frac{1}{2}(e_1 + e_2)$, diese Viererdrehung gehört aber nicht zur Gruppe G. Wir sehen also: Die beiden Translationen t, t' erzeugen die Translationsuntergruppe von G (denn Elemente in G müssen die Viererdrehungszentren auf Viererdrehungszentren abbilden). Wir kennen jetzt die Untergruppe G_0 aller eigentlichen Bewegungen in G, insgesamt besteht G_0 aus folgenden Symmetrien:

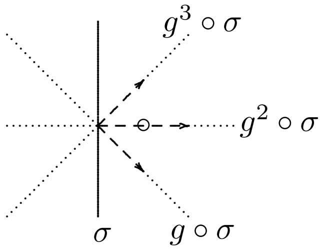


Nun nehmen wir an, dass G auch uneigentliche Bewegungen enthält. In diesem Fall ist $\overline{G}$ isomorph zur Diedergruppe $\mathcal{D}_4$. Wie wir wissen, operiert $\overline{G}$ auf dem Gitter $L = \{za + z'b \mid z, z' \in \mathbb{Z}\}$. Da die Elemente von $\overline{G} \subset \mathcal{O}(2)$ die Norm von Vektoren erhalten, operiert $\overline{G}$ auf den Vektoren in L mit Norm $\sqrt{2}$, dies sind die vier Vektoren a, $-a$, b, $-b$, die links im Koordinatensystem des $\mathbb{R}^2$ gezeichnet sind, rechts sind die vier Spiegelachsen eingetragen:



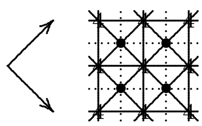
Da die y-Achse eine dieser Spiegelachsen ist, sehen wir: es gibt in G eine Spiegelung oder Gleitspiegelung mit einer vertikalen Achse ℓ. Da durch die entsprechende Spiegelung oder Gleitspiegelung die Menge der $\mathbb{Z}^2$ auf sich abgebildet werden muss, sieht man leicht, dass ℓ eine Gerade der Form $x = m$ oder $x = m + \frac{1}{2}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ ist. Verwenden wir die Verschiebungen t_a mit $a \in L$, so sehen wir, dass zumindest eine der beiden Geraden $x = -1$ oder $x = -\frac{1}{2}$ als Achse einer Spiegelung oder Gleitspiegelung in G auftritt.

Bevor wir die möglichen Fälle diskutieren, betrachten wir ganz allgemein eine Spiegelung σ an einer Geraden ℓ und eine Drehung g der Ordnung 4, deren Zentrum nicht auf ℓ liegt. $(*)$ *Dann sind $g \circ \sigma$, $g^2 \circ \sigma$ und $g^3 \circ \sigma$ Gleitspiegelungen!* Zum Beweis können wir annehmen, dass ℓ die Gerade $x = -\lambda$ mit $\lambda > 0$ ist und dass das Drehzentrum von g der Ursprung ist. Das folgende Bild zeigt die Achsen und die Verschiebungsvektoren:

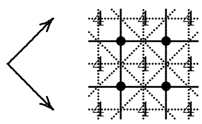


Die Gleitspiegelachse von $g \circ \sigma$ ist die Gerade $y = -x - \lambda$, der Verschiebungsvektor ist $\lambda(e_1 - e_2)$; die Gleitspiegelachse von $g^2 \circ \sigma$ ist die Gerade $y = 0$, der Verschiebungsvektor ist $2\lambda e_1$; die Gleitspiegelachse von $g^3 \circ \sigma$ ist die Gerade $y = x + \lambda$, der Verschiebungsvektor ist $\lambda(e_1 + e_2)$.

Fall 1: Die Spiegelung s an der y-Achse gehöre zu G. Mit Hilfe der Translationen sieht man, dass auch die Gerade $x = -1$ Spiegelachse ist. Wegen $(*)$ folgt, dass auch die Geraden $y = x + 1,\ y = 0,\ y = x - 1$ Gleitspiegelachsen sind und zwar mit Verschiebungsvektoren $e_1 + e_2,\ 2e_1,\ e_1 - e_2$. Aber diese Vektoren gehören alle zu L, demnach sind die Geraden $y = x+1,\ y = 0,\ y = x-1$ Spiegelachsen. Wenden wir nun $(*)$ auf die Gerade $y = x+1$ an (hier ist $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{2}$), so erhalten wir als zusätzliche Gleitspiegelachsen die Geraden $x = -\frac{1}{2}$ mit dem Verschiebungsvektor $-e_2$ und die Gerade $y = \frac{1}{2}$ mit dem Verschiebungsvektor e_1. Insgesamt erhalten wir also folgende Symmetrien:



Fall 2: Die Spiegelung s' an der Gerade $x = -\frac{1}{2}$ gehöre zu G. Wegen $(*)$ wissen wir, dass die Geraden $y = x + \frac{1}{2},\ y = x,\ y = x - \frac{1}{2}$ Gleitspiegelachsen sind, mit Verschiebungsvektoren $\frac{1}{2}(e_1 + e_2), e_1, \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$. Durch Verschiebungen und Drehungen erhalten wir folgende Symmetrien:



Es bleibt zu zeigen, dass es keine weiteren Möglichkeiten gibt. Wie wir wissen, ist zumindest eine der beiden Geraden $x = -1$ und $x = -\frac{1}{2}$ Spiegelachse oder Gleitspiegelachse. Handelt es sich dabei um eine Gleitspiegelachse, so gibt es eine zugehörige Gleitspiegelung mit Verschiebungsvektor e_2. Im Fall 1 ist $x = -1$ Spiegelachse, und $x = -\frac{1}{2}$ Gleitspiegelachse mit Verschiebungsvektor e_2. Im Fall 2 ist $x = -1$ Gleitspiegelachse mit Verschiebungsvektor e_2 und $x = -\frac{1}{2}$ Spiegelachse. Zusammen mit G_0 erzeugt eine derartige Spiegelung oder Drehspiegelung die Gruppe G. Dies zeigt: gibt es in G mindestens eine uneigentliche Bewegung, so liegt einer der beiden Fälle 1 oder 2 vor.

Beachte, dass diese beiden Fälle auf folgende Weise unterschieden werden können: Im Fall 1 gibt es durch jedes Zentrum einer Viererdrehung vier verschiedene Spiegelachsen, im Fall 2 dagegen verläuft keine einzige Spiegelachse durch ein Zentrum einer Viererdrehung.

Interessant ist auch: Im Fall 1 gibt es Spiegelungen mit vier verschiedenen Richtungen der Spiegelachsen, im Fall 2 gibt es nur zwei Richtungen von Spiegelachsen.