1 Aufgabe 10.4

Sei π eine Permutation von $1, 2, \ldots, n$ und $A(\pi) = (a_{st})_{st}$ die zugehörige Permutationsmatrix (mit $a_{\pi(t),t} = 1$ für $1 \leq t \leq n$ und $a_{st} = 0$ sonst). Zeige: $A(\pi)$ ist diagonalisierbar über $\mathbb{C}$. Bestimme die Eigenwerte und für jeden Eigenwert seine Multiplizität.

Hinweis: Betrachte zuerst den Fall der zyklischen Permutation ζ mit $\zeta(t) = t+1$ für $1 \leq t < n$ und $\zeta(n) = 1$. Wie kann man den allgemeinen Fall auf diesen Spezialfall zurückführen?

Lösung

Diagonalisierbarkeit

Die Matrix $A(\pi)$ enthält pro Zeile und pro Spalte genau einen Eintrag 1 und ansonsten nur Nullen. Folglich bilden die Spalten von $A(\pi)$ eine Orthonormalbasis (in diesem Fall die Basis aus n Einheitsvektoren). Damit ist $A(\pi)$ unitär und folglich diagonalisierbar.

Eigenwerte und ihre Multiplizitäten

Wir betrachten zunächst das Beispiel der zyklischen Permutation ζ. Es gilt

$$A(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Das charakteristische Polynom von $A(\zeta0$ können wir (etwa mit der Entwicklung nach der 1-ten Spalte) leicht berechnen. Es gilt

$$\chi_{A(\zeta)}(T) = \det\left(T \cdot E_n - A_\zeta\right) = T^n - 1 \tag{2}$$

Die Eigenwerte von $A(\zeta)$ sind also die Lösungen von $T^n = 1$. Über $\mathbb{C}$ sind dies gerade die n Einheitswurzeln $e^{\frac{2\pi ik}{n}}$ mit $k = 1 \ldots n$. Die Multiplizität der einzelnen Eigenwerte ist jeweils 1. Als verwenden wir (ohne Beweis) den folgenden

Satz 1 *Es sei π eine Permutation der Menge S_n. Dann gibt es zyklische Permutationen $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_t$ mit n_s = Länge des Zykels von π_s, so dass*

$$\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \cdots \circ \pi_t \quad \textit{und} \quad \sum_{s=1}^{t} n_s = n$$

gilt.

Es sei nun π eine beliebige Permutation und $A(\pi)$ die zugehörige Permutationsmatrix. Weiters sei $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \cdots \circ \pi_t$ mit π_s zyklisch für $s = 1 \ldots n$. Nach Gleichung (2) gilt für das charakteristische Polynom von π_s die Gleichung:

$$\chi_{A(\pi_s)}(T) = \det\left(T \cdot E_{n_s} - A_{\pi_s}\right) = T^{n_s} - 1$$

Das charakteristische Polynom von π ist nun gerade das Produkt der charakteristischen Polynome der π_s. Es gilt also

$$\chi_{A(\pi)}(T) = \prod_{s=1}^{t} (T^{n_s} - 1)$$

Die Eigenwerte von $A(\pi)$ sind also die primitiven n_s-ten Einheitswurzeln. Für die Multiplizität M einer primitiven n-ten Einheitswurzeln ζ_m gilt also:

$$M(\zeta_m) = \#\left\{ n_s, s = 1 \ldots t \mid \ m | n_s \right\}.$$

$\square$

Beispiel

Es sei $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 \circ \pi_4 \circ \pi_5$ eine Zerlegung einer Permutation in zyklische Permutationen und es seien $n_1 = 6, n_2 = n_3 = 3, n_4 = 2, n_5 = 1$ die Längen der Zykel. Dann schreiben wir uns eine Tabelle, in der wir die Eigenwerte und ihre Multiplizitäten bestimmen. Es ist

ζ_m	$M(\zeta_m)$	(6,	3,	3,	2,	1)
1	5	·	·	·	·	·
-1	2	·			·	
ζ_3	3	·	·	·		
ζ_3^2	3	·	·	·		
ζ_6	1	·				
ζ_6^5	1	·				

Dabei geben die kleinen Punkte jeweils an, ob die Einheitswurzel als Lösung von $\chi_{A_{\pi_s}} = 0$ auftritt.