Typische Klausuraufgaben 1.

1. Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Sei v_1 Eigenvektor zu f mit Eigenwert λ_1, sei v_2 Eigenvektor zu f mit Eigenwert λ_2. Zeige: Ist auch $v_1 + v_2$ ein Eigenvektor zu f, so ist $\lambda_1 = \lambda_2$.

2. Zeige: Seien $A, B \in M(n \times n, K)$ nilpotente Matrizen. Ist $AB = BA$, so ist $A + B$ nilpotent.

3. Man gebe zwei nilpotente (2×2)-Matrizen A, B an, sodass $A + B$ nicht nilpotent ist.

4. Man gebe zwei nilpotente (2×2)-Matrizen A, B an, sodass AB nicht nilpotent ist.

5. Gibt es eine nilpotente (2×2)-Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ mit $a_{ij} \neq 0$ für alle i, j? (Beispiel oder Beweis der Nicht-Existenz.)

6. Sei $A = (a_{ij})$ eine $(n \times n)$-Matrix mit $a_{ij} = 0$ für alle $i \geq j$. Man gebe eine Formel für A^{n-1} an. (Ohne Beweis).

7. Man gebe die Eigenräume für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$$

an (ohne Beweis).

8. Sei J_n der nilpotente $(n \times n)$-Jordan-Block. Man beschreibe die Menge der Matrizen B mit $J_n B = B J_n$. (Ohne Beweis)

9. Sei $A \in M(n \times n, K)$ und $p(T)$ ein normiertes Polynom mit $p(A) = 0$ Zeige: Ist der konstante Koeffizient von $p(T)$ von Null verschieden, so ist A invertierbar.

10. Sei

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M(2 \times 2, K)$$

mit $a \neq c$. Man gebe eine invertierbare Matrix P an, sodass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.

11. Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Betrachte die Abbildung $L\colon V \to V$, die durch $L(f)(r) = f(-r)$ für $r \in \mathbb{R}$ und $f \in V$ definiert ist. Zeige, dass gilt: $V = \mathrm{Eig}(L; 1) + \mathrm{Eig}(L; -1)$.

12. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Zeige: Ist B eine Linear-Kombination von Potenzen A^t (mit $t \geq 0$), so gilt $AB = BA$.

13. Man bestimme **mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus** ganze Zahlen a, b mit $40a + 19b = 1$.

14. Berechne **mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus** reelle Polynome $\phi(T)$ und $\psi(T)$ mit

$$\phi(T)(T^2 + T) + \psi(T)(T^2 - 1) = T + 1$$

15. Man gebe eine Matrix B an mit $\chi_B = T^7 + 9t - 4$. (Ohne Beweis)

16. Gibt es ein Polynom vom Grad 6 mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$, das keine Nullstellen besitzt? (Beispiel oder Beweis des Nichtexistenz)

17. Man gebe ein irreduzibles Polynom vom Grad 3 mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ an. (Ohne Beweis)

18. Man gebe ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{Q}[T]$ an, das als Element von $\mathbb{R}[T]$ nicht irreduzibel ist. (Ohne Beweis).

19. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:

(1) Ein Eigenvektor zur $(n \times n)$-Matrix A ist ein Element $v \in K^n$, so dass $Av = \lambda v$ für ein $0 \neq \lambda \in K$.

(2) Ist v ein Eigenvektor zum Endomorphismus $f\colon V \to V$, so ist auch $2v$ ein Eigenvektor zu f.

(3) Sind v_1, v_2 Eigenvektoren zum Endomorphismus $f\colon V \to V$, so ist auch $v_1 + v_2$ ein Eigenvektor zu f.

(4) Ist $f(v) = 0$ für alle Vektoren $v \in V$, so ist 0 ein Eigenwert.

20. Zeige oder widerlege: Sind U_1, U_2, U_3 Unterräume von V, und ist $(U_1 \oplus U_2) \cap U_3 = 0$, so ist auch $U_1 \cap (U_2 \oplus U_3) = 0$.

21. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeige: Gilt $g_1 g_2 g_1 g_2 = 1$ für alle $g_1, g_2 \in G$, so ist $g = g^{-1}$ für alle $g \in G$.

Bemerkungen: Aufgabe 1 ist Teil von 1.1. Aufgaben 2 und 3 sind Teil von 1.3. Aufgabe 6 ist Teil von P1.2. Aufgabe 7 ist Teil von P1.3. Aufgabe 8 ist Teil von 2.3. Aufgabe 9 ist Teil von 2.3. Aufgabe 10 entspricht P2.1. Aufgabe 11 ist Teil von P2.2. Aufgabe 12 ist Teil von P2.3. Aufgaben 13 und 14: siehe 3.1. Aufgabe 15: siehe 3.3. Aufgabe 17 ist Teil von P3.3.

Typische Klausuraufgaben 2.

1. Seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$. Bilde die $n \times n$-Matrix

$$B = B(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & & 0 & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Sei U der kleinste B-invariante Unterraum von K^n, der den kanonischen Basisvektor $e_1 = [1\ 0\ \cdots\ 0]^t$ enthält. Welche Dimension hat U ? (Ohne Beweis).

2. Sei V ein Vektorraum, sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, \dots, v_m$ Eigenvektoren zu f mit paarweise verschienden Eigenwerten. Sei $v = \sum_{i=1}^m v_i$. Zeige:

$$L(v, f(v), \dots, f^{m-1}(v)) = L(v_1, \dots, v_m).$$

3. Sei V ein Vektorraum, sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, \dots, v_m$ Eigenvektoren zu f mit Eigenwert λ. Sei $v = \sum_{i=1}^m v_i$. Wie bestimmt man die Dimension von $U = L(v, f(v), \dots, f^{m-1}(v))$?

4. Betrachte den nilpotenten Jordanblock $J_5 \in M(5 \times 5, K)$ und gib alle J_5-invarianten Unterräume von K^5 an. (Ohne Beweis).

5. Sei V n-dimensionaler Vektorraum, sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Bild}(f)$. Wie sieht die Jordansche Normalform aus? (ohne Beweis),

6. Sei V ein Vektorraum, sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Beweise: Sind U_1, U_2 ein f-invariante Unterräume, so ist auch $U_1 + U_2$ f-invarianter Unterraum.

7. Man gebe einen Endomorphismus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, so dass 0, $\mathbb{R}^2$ und die Geraden $\{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $\{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ die einzigen f-invarianten Unterräume sind.

8. Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

mit $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Für welche Werte a_0, a_1, a_2, a_3 sind die Matrizen A, B ähnlich?

9. Zeige oder widerlege: Seien $c, d \in \mathbb{C}$. Ist $c + d \in \mathbb{R}$ und $cd \in \mathbb{R}$, so ist $d = \overline{c}$.

10. Man bestimme alle komplexen Zahlen ω mit $\omega^8 = 1$.

11. Gegeben seien $(n \times n)$-Matrizen A, B mit $AB = BA$. Zeige: Ist $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$ eindimensional, und ist v ein Eigenvektor zu A mit Eigenwert λ, so ist v auch Eigenvektor zu B.

12. Seien B, C quadratische Matrizen und sei

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

Beweise oder widerlege: Es ist $\mu_A = \mu_B \mu_C$ (dabei sei μ_D das Minimalpolynom einer Matrix D).

13. Welche invarianten Unteräume gibt es zur reellen Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Ohne Beweis.)

14. Das charakteristische Polynom der Matrix A sei $\chi_A = T^4 - T^2$. Welche Möglichkeiten gibt es dann für das Minimalpolynom μ_A? (Ohne Beweis.)

15. Sei $f\colon V \to V$ diagonalisierbar mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$. Bestimme das Minimal-Polynom von f. (Ohne Beweis.)

16. Beweise. Ist λ Eigenwert eines Automorphismus f, so ist λ^{-1} Eigenwert zu f^{-1}.

17. Sei $A \in M(n \times n, K)$ und $B = A^2 + A$. Beweise: $\mathrm{Kern}(l_B)$ ist A-invarianter Unterraum.

18. Seien U_1, U_2 Unterräume von V mit $V = U_1 \oplus U_2$. Sei $p\colon V \to V$ die Projektionsabbildung mit Bild U_1 und Kern U_2. Welche Eigenwerte λ besitzt p und wie sehen die Eigenräume $\mathrm{Eig}(p, \lambda)$ aus?

19. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:

(1) Das charakteristische Polynom einer Matrix A ist ein Teiler des Minimalpolynoms der Matrix A.
(2) Diagonalisierbare $n \times n$-Matrizen mit gleichem Minimalpolynom sind ähnlich.
(3) Sind A, B $n \times n$-Matrizen, so ist das charakteristische Polynom von $A+B$ die Summe der charakteristischen Polynome von A und von B.
(4) Sind A, B $n \times n$-Matrizen, so ist das charakteristische Polynom von AB das Produkt der charakteristischen Polynome von A und von B.

Bemerkungen: Aufgabe 1: siehe 3.3. Aufgaben 2 und 3 sind Teile von 4.1. Aufgabe 4: siehe 4.2. Aufgabe 5: siehe 4.4. Aufgabe 6 ist P4.1. Aufgabe 7: siehe P4.3. Aufgabe 8: siehe 5.1. Aufgabe 9 ist Teil von 5.4. Aufgabe 10: siehe P5.4. Aufgabe 11 ist Teil von 5.2. Aufgabe 12: siehe 6.2. Aufgabe 13: siehe 6.4. Aufgabe 14: siehe P6.1. Aufgabe 15 ist P6.3.

Typische Klausuraufgaben 3.

1. Bestimme die Jordansche Normalform für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Zeige: Ist A invertierbar, so gibt es ein Polynom $\phi \in K[T]$ mit Grad $n-1$, sodass gilt:

$$A^{-1} = \phi(A).$$

3. Wie viele Ähnlichkeitsklassen nilpotenter 5×5-Matrizen gibt es?

4. Wie viele selbstduale Partitionen von $n = 12$ gibt es?

5. Zeige: Ist $A \in M(n \times n, K)$ mit $A^2 + A + E_n = 0$, so ist A^3 diagonalisierbar.

6. Wie lautet das Minimalpolynom für die nilpotente Jordan-Matrix $J(17, 17, 5, 2)$?

7. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Zeige: Hat das Minimalpolynom μ_A mehrfache Nullstellen, so ist A nicht diagonalisierbar.

8. Seien U, U', W Unterräume des Vektorraums V. Sei $V = U \oplus U'$. Zeige: Ist $U \subseteq W$, so ist $W = U \oplus (U' \cap W)$.

9. Zeige: Ist das charakteristische Polynom χ_A der Matrix A irreduzibel, so ist $\mu_A = \chi_A$.

10. Betrachte die folgende reelle Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 13 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. Bestimme alle A-invarianten Unterräume von $\mathbb{R}^2$.

11. Sei $P \in \mathrm{GL}(n, K)$. Zeige: Die Abbildung $A \mapsto P^{-1}AP$ ist ein Gruppen-Isomorphismus $\mathrm{GL}(n, K) \to \mathrm{GL}(n, K)$.

12. Betrachte den kanonischen unitären Raum $\mathbb{C}^3$. Normalisiere den Vektor $\begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und ergänze zu einer Orthonormalbasis.

13. Zeige oder widerlege: Sind A, B symmetrische reelle $(n \times n)$-Matrizen, so ist auch AB symmetrisch.

14. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Zeige: Ist das Minimalpolynom von A irreduzibel mit Grad t, so ist n ein ganz-zahliges Vielfache von t.

15. Sei $v \in \mathbb{C}^n$. Zeige: Ist $v^t \overline{w} = 0$ für alle $w \in \mathbb{C}^n$, so ist $v = 0$.

16. Betrachte die Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Man gebe eine invertierbare Matrix P an, sodass $P^{-1}AP$ eine Jordanmatrix ist.

17. Sei $U = L(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})$. Man gebe eine Komplementärbasis zu U in K^4 an.

18. Zeige: Ist die Matrix A unitär, so ist auch $\overline{A}$ unitär.

19. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:
(1) Jede quadratische Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ ist diagonalisierbar.
(2) Jede orthogonale Matrix besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.
(3) Zu jeder diagonalisierbaren Matrix $\in M(n \times n, \mathbb{R})$ gibt es eine Orthonormalbasis des kanonischen euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren.
(4) Ist $A \in M(n \times n, K)$ nilpotent, so ist $A^{n-1} = 0$.

20. Wie sehen die Jordanschen Normalformen der Matrizen A mit charakteristischem Polynom $\chi_A = T^4 - T^3$ aus ?

21. 1. Sei $A \in M(8 \times 8, \mathbb{R})$ nilpotent, für die Unterräume $\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Kern}(l_A)$ von K^n gelte:

$i =$	1	2	3
$\dim \mathrm{Kern}(A^i) =$	2	4	5

Wie sieht die Jordan'sche Normalform von A aus?

Bemerkungen: Aufgabe 1: siehe 7.2. Aufgabe 2 ist Teil von 7.3. Zur Aufgabe 3 siehe 7.4. Aufgabe 4 ist Teil von 7.3 (hier einmal schwerer). Aufgabe 7 ist Teil von P7.5. Aufgabe 8 ist Teil von 8.1. Aufgabe 10 ist Teil von P8.2. Aufgabe 13 ist Tei von 9.2. Die Aufgaben 20 und 21 stammen vom Übungszettel zur Jordan'schen Normalform.

Typische Klausuraufgaben 4.

1. Die reelle Matrix

$$B = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & c_1 \\ \sin(t) & \cos(t) & c_2 \\ d_1 & d_2 & e \end{bmatrix}$$

sei orthogonal und es gelte $\det B = 1$. Wie sehen die Zahlen c_1, c_2, d_1, d_2, e aus?

2. Sei π eine Permutation von $\{1, 2, \ldots, n\}$ und $A(\pi) = (a_{st})_{st} \in M(n \times n, \mathbb{R})$ die zugehörige Permutationsmatrix (mit $a_{\pi(t),t} = 1$ für $1 \leq t \leq n$ und $a_{st} = 0$ sonst). Zeige: $A(\pi)$ ist orthogonale Matrix.

3. Man diagonalisiere die komplexe Matrix

$$\begin{bmatrix} 4 & 3i \\ -3i & 4 \end{bmatrix}$$

4. Zeige: Es gibt nur eine nilpotente hermitesche Matrix in $M(n \times n, \mathbb{C})$.

5. Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ selbstadjungiert und unitär. Zeige: $A^2 = E_n$.

6. Bestimme alle Paare $(t, t') \in \mathbb{R}^2$, so dass die Matrizen

$$\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \cos t' & \sin t' \\ \sin t' & -\cos t' \end{bmatrix}$$

ähnlich sind.

7. Man gebe zwei hermitesche (2×2)-Matrizen A, B an, sodass AB nicht hermitesch ist.

8. Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ mit $A^t = -\overline{A}$. Zeige: Ist λ ein Eigenwert von A, so ist λ rein-imaginär.

9. Gesucht ist eine quadratische Form $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sodass die Nullstellenmenge $V(q)$ eine Parabel ist, und zwar soll eine der Hauptachsen die Ursprungsgerade durch $[1\ 1]^t$ sein.

10. Definiere eine Abbildung $\eta\colon (K^n, +) \to \mathrm{GL}(n+1, K)$ durch

$$\eta(v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & E_n \end{bmatrix}.$$

Zeige: Dies ist ein Gruppen-Homomorphismus.

11. Bestimme Hauptachsen für die reelle quadratische Form
$$X^2 + 3Y^2 + 2\sqrt{3}XY.$$

12. Sei $\langle -, - \rangle$ die durch die Matrix
$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$
gegebene Bilinearform auf $V = \mathbb{R}^4$. Gesucht sind zwei 2-dimensionale Unterräume $U \subset V$, auf denen $\langle -, - \rangle$ negativ definit ist.

13. Zeige oder widerlege: Ist A hermitesche $(n \times n)$-Matrix, so ist $|Av| = |v|$ für alle $v \in \mathbb{C}^n$.

14. Zeige oder widerlege: Ist A orthogonale $(n \times n)$-Matrix, und ist $Av = 0$, so ist $v = 0$.

15. Sei $A \in \mathcal{O}(n)$. Zeige: Ist 1 kein Eigenwert von A, so ist $\det A = -1$.

16. Zeige: Ist A unitäre Matrix, und ist $|\det A| = 1$.

17. Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein unitärer Raum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Zeige: $U \cap U^\perp = 0$.

18. Seien Q_1, Q_2 orthogonale $(n \times n)$-Matrizen, seien R_1, R_2 reelle obere Dreiecksmatrizen mit positiven Diagonalkoeffizienten. Zeige: Gilt $Q_1R_1 = Q_2R_2$, so ist $Q_1 = Q_2$ und $R_1 = R_2$.

19. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:
(1) Ist A orthogonale Matrix und λ ein Eigenwert von A, so ist $\lambda \in \mathbb{R}$.
(2) Ist A hermitesche Matrix und λ ein Eigenwert von A, so ist $|\lambda| = 1$.
(3) Ist A unitäre Matrix und λ ein Eigenwert von A, so ist $\lambda \in \mathbb{R}$.
(4) Ist A hermitesche Matrix und λ ein Eigenwert von A, so ist $\lambda \neq 0$.

20. Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein unitärer Vektorraum, sei $f \colon V \to V$ selbstadjungierter Endomorphismus. Zeige: Ist U ein f-invarianter Unterraum von V, so ist auch $U^\perp$ f-invarianter Unterraum.

21. Sei $f \colon V \to V$ Endomorphismus eines k-Vektorraums. Sei U ein f-invarianter Unterraum von V. Zeige: $f(U)$ ist ebenfalls f-invariant.

Bemerkungen. Aufgabe 1: siehe 10.1., Aufgabe 2 ist Teil von 10.4. Aufgabe 3 entspricht P10.2. Aufgabe 4 ist P10.4. Aufgabe 5 ist Teil von P10.5. Aufgabe 6 ist Teil von 11.1. Aufgabe 7 ist Teil von 11.2. Aufgabe 8 ist 11.3. Aufgabe 9: siehe P11.3. Aufgabe 10: siehe 12.1. Aufgabe 11: siehe 12.3. Aufgabe 12 entspricht einem Teil von P12.2.

Typische Klausuraufgaben 5.

1. Sei $p(X,Y,Z) = X^2 + Y^2 - Z^2 - 1$. Der Punkt $(1,0,0) \in \mathbb{R}^3$ gehört offensichtlich zu $F = V(p)$. Zeige: Die Gerade durch $(1,1,1)$ mit Richtungsvektor $(0,1,1)$ liegt auf der Fläche F.

2. Sei $A \in M(n,\mathbb{R})$ symmetrisch. Setze $f(x) = x^t Ax$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige: Die Menge

$$Z(f) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = f(x+z) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n\}$$

ist ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

3. Sei β eine Gleitspiegelung im $\mathbb{R}^2$. Zeige: β^2 ist eine Translation.

4. Gegeben sei das quadratische Polynom

$$q(X,Y) = X^2 + 2XY + Y^2 - 2X - 2Y + 1.$$

Ist die Nullstellenmenge $V(q)$ eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel?

5. Man bestimme die Hauptachsen der Quadrik

$$4X^2 - 2XY + 4Y^2 = 4.$$

6. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:
(1) Jeder Punkt auf einem einschaligen Hyperboloid F liegt auf zwei Geraden, die ganz in F enthalten sind.
(2) Ein zweischaliges Hyperboloid enthält keine Geraden.
(3) Ein elliptisches Paraboloid enthält keine Geraden.
(4) Jeder Punkt auf einem hyperbolischen Parabolid F liegt auf zwei Geraden, die ganz in F enthalten sind.

7. Mit Hilfe des Hauptminoren-Kriteriums entscheide man, ob die Bilinearformen $\langle -,- \rangle_A$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

positive definit ist oder nicht.

8. Gegeben seien Friese, wie man sie etwa unter

http://www.math.uni-bielefeld.de/birep/la2/friese.html findet. Man bestimme jeweils den Typ der zugehörigen Fries-Gruppe (das Bestimmungsblatt darf verwendet werden).

9. Gegeben seien Muster, wie man sie etwa unter

`http://www.math.uni-bielefeld.de/birep/la2/muster.html`

findet. Man bestimme jeweils den Typ der zugehörigen ebenen Kristallgruppe (das Bestimmungsblatt darf verwendet werden).

10. Betrachte das regelmäßige 17-Eck

$$X = \{(\cos \frac{2t\pi}{17}, \sin \frac{2t\pi}{17}) \mid 0 \le t < 17\}$$

im $\mathbb{R}^2$ und seine Symmetrie-Gruppe G. Wieviele eigentliche und wieviele uneigentliche Bewegungen gehören zu G?

11. Beweis: Der Kern eines Gruppenhomomorphismus ist eine Untergruppe.

12. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:
(1) Der Polynomring $K[X]$ in einer Variablen X mit Koeffizienten in einem Körper K ist wieder ein Körper.
(2) $\mathbb{N}_0$ ist ein Ring.
(3) $\mathrm{GL}(n, K)$ ist ein Ring.
(4) Die Untermenge $\{0, 1\}$ von $\mathbb{Z}$ ist ein Unterring.

13. Sei $\phi \in \mathcal{B}(2)$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:
(1) Hat ϕ einen Fixpunkt, so ist ϕ eine Drehung.
(2) Hat ϕ keinen Fixpunkt, so ist ϕ eine Translation.
(3) Ist ϕ eine Translation, so gibt es unendlich viele Fixgeraden.
(4) Gibt es einen und nur einen Fixpunkt, so ist ϕ eine Drehung.

14. Betrachte die Menge L der Matrizen der Form

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{Q}.$$

Es sei schon gezeigt, dass die Menge L ein Unterring von $M(2 \times 2, \mathbb{Q})$ ist. Man beweise, dass L ein Körper ist.

15. Man beweise mit Hilfe der Matrizen-Multiplikation: Die Hintereinanderschaltung zweier Spiegelungen an Ursprungsgeraden ist eine Drehung um den Ursprung.

16. Wie sehen alle (2×2)-Matrizen A mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ aus, sodass das Bild von f_A die Diagonale $\{(r, r) \mid r \in \mathbb{R}\}$ ist?

Bemerkungen. Aufgabe 1: siehe 13.1. Aufgabe 2 ist Teil von 13.2. Aufgabe 3 ist Teil von 13.3. Aufgabe 4: siehe P13.2. Aufgabe 5: siehe P13.1. Aufgabe 7: siehe Aufgabe P14.1. Die Aufgaben 8 und 9 sind P14.2 und P14.3.

Typische Klausuraufgaben 1: Kommentare

Zu den ODER-Aufgaben (Beweis oder Gegenbeispiel):

5. Es gibt solche Matrizen, zum Beispiel $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

16. Es gibt solche Polynome, zum Beispiel $(T^2+1)^3$.

---

19. Alle Aussagen sind falsch. (Man mache sich noch einmal klar: In der Mathematik genügt es, ein einziges Gegenbeispiel anzugeben, um zu zeigen, dass eine Aussage falsch ist.)

Welche Antworten werden in der Klausur erwartet? Hier drei Beispiele:

1. Der Eigenwert zu $v_1 + v_2$ sei λ. Angenommen, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Nach einem Satz, der in der Vorlesung bewiesen wurde, sind Eigenvektoren mit verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig, also sind v_1, v_2 linear unabhängig. Es ist

$$\lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2) = f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von v_1 und v_2 folgt $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$, also $\lambda_1 = \lambda_2$.

10. Es reicht, die Matrix

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{bmatrix}$$

anzugeben.

[Wie findet man sie? Man sucht Eigenvektoren zu den Eigenwerten a und b. Natürlich ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert a. Und mit etwas Rechnen sieht man, dass zum Beispiel $\begin{bmatrix} 1 \\ b-a \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert b ist.]

21. Beweis. Sei $g \in G$ gegeben. Setze $g_1 = g$, und $g_2 = 1$. Dann ist $g^2 = g_1 g_2 g_1 g_2 = 1$. Multiplikation von links mit g^{-1} liefert $g = g^{-1}g^2 = g^{-1} \cdot 1 = g^{-1}$.

Typische Klausuraufgaben 1: Weitere Kommentare 1

Zu 19 (2). Warum gibt es hier Gegenbeispiele? Ist $f(v) = \lambda v$, so gilt natürlich $f(2v) = \lambda \cdot (2v)$. Aus der Gleichheit $f(2v) = \lambda \cdot 2v$ folgt aber **nicht**, dass $2v$ ein Eigenvektor ist, denn Eigenvektoren sind **von Null verschiedene** Vektoren. Gegenbeispiele gibt es also, wenn der Grundkörper die Charakteristik 2 hat (und nur dort).

Zu 15. Ein Student schrieb: *Ist diese Frage nicht etwas zu speziell? Entweder weiß man das auswendig und kommt nach 10 Sekunden darauf, oder man kann lange überlegen .....* Dies ist in der Tat eine Wissensfrage, keine Rechenaufgabe. Es gibt spezielle Matrizen, mit denen man vertraut sein muss, wenn man mit den Methoden der linearen Algebra arbeiten will, wie etwa die Vandermonde'schen Matrizen oder eben die Begleitmatrizen. Auf die Idee, derartige Matrizen zu bilden, würde man selbst erst einmal nicht kommen, aber sobald man sie gesehen hat, sollten sie einem vertraut sein. Die Begleitmatrix kam nicht nur in den Übungsaufgaben vor, sie findet sich auch im Leitfaden (4.7.4). Dies sind also Dinge, die man wirklich auswendig kennen muss.

(Übrigens: hat man das System, nach dem die Begleitmatrix gebildet ist, durchschaut, so braucht man eigentlich doch nichts auswendig zu lernen: der i-te kanonische Basisvektor e_i geht auf den $(i+1)$-ten, für $1 \leq i \leq n-1$, der n-te geht auf eine beliebige Linearkombination der Basisvektoren: diese Koeffizienten stehen also in der letzten Spalte. Da man auf diese Weise $A^n e_1$ als Linearkombination der Vektoren $A^i e_1$ mit $0 \leq i \leq n-1$ geschrieben hat, erhält man ein normiertes Polynom p vom Grad n mit $p(A)e_1 = 0$ (die Koeffizienten sind bis auf Vorzeichen gerade die Koeffizienten der Linearkombination). Die Theorie liefert nun das schöne Ergebnis, dass dieses Polynom p das charakteristische Polynom ist!)

Wie wichtig diese Fragestellung ist, sollte man der Tatsache entnehmen, dass mehrere Aufgaben diesen Zusammenhang thematisierten, so zum Beispiel die Übungsaufgaben 8.3 und 8.4. Es ist auch nicht überraschend, dass man selbst in die Wikipedia das Stichwort "Begleitmatrix" findet.

Typische Klausuraufgaben 2: Kommentare

Zu den ODER-Aufgaben (Beweis oder Gegenbeispiel):

9. Die Aussage ist falsch.

12. Die Aussage ist falsch.

---

19. Alle Aussagen sind falsch.

Typische Klausuraufgaben 3: Kommentare

1. Es ist $\mathrm{Rang}(A) = 2,\ \mathrm{Rang}(A^2) = 1,$ also ist A ähnlich zu $J(3,1)$.

5. Es gilt sogar $A^3 = E_n$. Beweis: $(A^2 + A + E_n)(A - E_n) = A^3 - E_n$.

13. Die Aussage ist falsch. Ein typisches Beispiel ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

19. Alle Aussagen sind falsch.

Hier die vollständige Lösung zweier Aufgaben (wegen einer Nachfrage):

10. Das charakteristische Polynom

$$\chi_A = (T-1)(T+1) + 2 = T^2 - 1 + 2 = T^2 + 1$$

hat keine Nullstelle (in $\mathbb{R}$), also gibt es keinen Eigenvektor und demnach keinen eindimensionalen A-invarianten Unterraum. Die einzigen A-invarianten Unterräume sind demnach 0 und $\mathbb{R}^2$.

12. Die Norm von $v = [1+i, 1, 0]$ ist $\sqrt{3}$. Normalisieren von v liefert $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}[1+i, 1, 0]$. Dazu orthogonal (und auch normalisiert) ist $v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}[-1, 1-i, 0]$. Orthogonal zu den beiden Vektoren v_1, v_2 ist zum Beispiel $v_3 = [0,0,1]$, und natürlich ist $||v_3|| = 1$. Die Vektoren v_1, v_2, v_3 bilden eine Orthonormalbasis.

Hinweis. Im Leitfaden 3 findet man auf Seite 41 eine Anleitung, wie man alle Orthonormalbasen von $\mathbb{C}^2$ erhält; die bisherige Seite 41 war allerdings fehlerhaft, eine neue Version hängt im Netz.

Typische Klausuraufgaben 4: Kommentare

Zu den ODER-Aufgaben (Beweis oder Gegenbeispiel): Aussage **13** ist falsch, Aussage **14** ist richtig.

19. Alle Aussagen sind falsch.

7. Siehe Aufgabe 13 des 3.Klausurzettels.

9. Beispiel: $X^2 + Y^2 - 2XY + 2X$.
Wie kommt man darauf? Man beginnt mit einer Parabel, zum Beispiel $V(Y - X^2)$ und dreht sie ...
Noch einfacher ist es, eine symmetrische (3×3)-Matrix A' zu nehmen, sodass für A' und den rechten unteren (2×2)-Block A gilt: Der Rang von A ist 1, der Rang von A' ist 3, und $[1\ 1]^t$ ist Eigenvektor von A, also zum Beispiel eben

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zwei Musterlösungen

2. Die Spalten einer Permutationsmatrix entstehen aus der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^n$ durch Vertauschungen, bilden also eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$.

8. Sei $A^t = -\overline{A} \in M(n \times n, \mathbb{C})$, sei v Eigenvektor zu A mit Eigenwert λ. Dann ist

$$\begin{aligned}\lambda(v^t\overline{v}) &= (\lambda v)^t\overline{v} = (Av)^t\overline{v} = (v^tA^t)\overline{v} = v^t(A^t\overline{v}) = v^t(-\overline{A}\overline{v}) \\ &= -v^t(\overline{Av}) = -v^t\overline{\lambda v} = -v^t\overline{\lambda}\overline{v} = -\overline{\lambda}(v^t\overline{v}).\end{aligned}$$

Wegen $v \neq 0$ ist $v^t\overline{v} \neq 0$, also ist $\lambda = -\overline{\lambda}$ und demnach λ rein-imaginär.

Typische Klausuraufgaben 5: Kommentare

6. Alle Aussagen sind richtig.

12. Alle Aussagen sind falsch.

13. Die Aussagen (1) und (2) sind falsch, die Aussagen (3) und (4) richtig.

14. In der Aufgabe 5.3 war zu zeigen, dass der Unterring der reellen (2×2)-Matrizen der Form

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

ein Körper ist, und zwar ein Körper, der isomorph zum Körper der komplexen Zahlen ist. Hier nun wird der Unterring der komplexen Zahlen $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ thematisiert. Man muss also nur wissen, wie man für die komplexe Zahl $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ die komplexe Zahl $1/z$ berechnet.

Es gibt auch einen ganz elementaren Zugang: wir arbeiten mit einem Ring von (2×2)-Matrizen. Wir wollen ein Ring-Element invertieren — also eine Matrix invertieren: Man kennt aus LAI die Regel: eine Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$. Die von Null verschiedenen Elemente in L sind also invertierbar ($\det A = a^2 + b^2$), und wir können die inverse Matrix sofort hinschreiben (z.B. mit Hilfe der Adjunkte; bei einer (2×2)-Matrix ist dies einfach). Zu überprüfen ist nur noch, ob diese inverse Matrix wieder zu L gehört, aber dies ist der Fall.

Eine Musterlösung

15. Seien $A, B \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ Matrizen, die Spiegelungen an Ursprungsgeraden beschreiben. Die Matrizen A, B sind orthogonal mit $\det A = -1 = \det B$. Also ist AB orthogonal mit $\det AB = 1$, demnach beschreibt AB eine Drehung.