Typische Klausuraufgaben 1.

Die Klausur wird vor allem aus sogenannten **5-Minuten-Aufgaben** bestehen, also aus Aufgaben, die man (wenn man den Stoff beherrscht und die Lösungen der Übungs- und Präsenzaufgaben kennt und verstanden hat) in zwei oder drei Minuten lösen kann (natürlich braucht man zusätzlich Zeit, um den Aufgabentext zu verstehen, und dann auch, um die Lösung zu kontrollieren, also eben 5 Minuten)..

Hier sind nun einige derartige Aufgaben zusammengestellt, und zwar thematisch orientiert an den ersten drei Aufgabenblättern und Leitfaden, Teil 1 + Einschub.

Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum, alle Matrizen haben Koeffizienten in K .

1. Sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Sei v_1 Eigenvektor zu f mit Eigenwert λ_1 , sei v_2 Eigenvektor zu f mit Eigenwert λ_2 . Zeige: Ist auch $v_1 + v_2$ ein Eigenvektor zu f , so ist $\lambda_1 = \lambda_2$.
2. Zeige: Seien $A, B \in M(n \times n, K)$ nilpotente Matrizen. Ist $AB = BA$, so ist $A + B$ nilpotent.
3. Man gebe zwei nilpotente (2×2) -Matrizen A, B an, sodass $A + B$ nicht nilpotent ist.
4. Man gebe zwei nilpotente (2×2) -Matrizen A, B an, sodass AB nicht nilpotent ist.
5. Gibt es eine nilpotente (2×2) -Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ mit $a_{ij} \neq 0$ für alle i, j ? (Beispiel oder Beweis der Nicht-Existenz.)
6. Sei $A = (a_{ij})$ eine $(n \times n)$ -Matrix mit $a_{ij} = 0$ für alle $i \geq j$. Man gebe eine Formel für A^{n-1} an. (Ohne Beweis).
7. Man gebe die Eigenräume für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$$

an (ohne Beweis).

8. Sei J_n der nilpotente $(n \times n)$ -Jordan-Block. Man beschreibe die Menge der Matrizen B mit $J_n B = B J_n$. (Ohne Beweis)
9. Sei $A \in M(n \times n, K)$ und $p(T)$ ein normiertes Polynom mit $p(A) = 0$ Zeige: Ist der konstante Koeffizient von $p(T)$ von Null verschieden, so ist A invertierbar.

10. Sei

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M(2 \times 2, K)$$

mit $a \neq c$. Man gebe eine invertierbare Matrix P an, sodass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.

11. Sei $V = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Betrachte die Abbildung $L: V \rightarrow V$, die durch $L(f)(r) = f(-r)$ für $r \in \mathbb{R}$ und $f \in V$ definiert ist. Zeige, dass gilt: $V = \text{Eig}(L; 1) + \text{Eig}(L; -1)$.

12. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Zeige: Ist B eine Linear-Kombination von Potenzen A^t (mit $t \geq 0$), so gilt $AB = BA$.

13. Man bestimme **mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus** ganze Zahlen a, b mit $40a + 19b = 1$.

14. Berechne **mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus** reelle Polynome $\phi(T)$ und $\psi(T)$ mit

$$\phi(T)(T^2 + T) + \psi(T)(T^2 - 1) = T + 1$$

15. Man gebe eine Matrix B an mit $\chi_B = T^7 + 9t - 4$. (Ohne Beweis)

16. Gibt es ein Polynom vom Grad 6 mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$, das keine Nullstellen besitzt? (Beispiel oder Beweis des Nichtexistenz)

17. Man gebe ein irreduzibles Polynom vom Grad 3 mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ an. (Ohne Beweis)

18. Man gebe ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{Q}[T]$ an, das als Element von $\mathbb{R}[T]$ nicht irreduzibel ist. (Ohne Beweis).

19. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:

- (1) Ein Eigenvektor zur $(n \times n)$ -Matrix A ist ein Element $v \in K^n$, so dass $Av = \lambda v$ für ein $0 \neq \lambda \in K$.
- (2) Ist v ein Eigenvektor zum Endomorphismus $f: V \rightarrow V$, so ist auch $2v$ ein Eigenvektor zu f .
- (3) Sind v_1, v_2 Eigenvektoren zum Endomorphismus $f: V \rightarrow V$, so ist auch $v_1 + v_2$ ein Eigenvektor zu f .
- (4) Ist $f(v) = 0$ für alle Vektoren $v \in V$, so ist 0 ein Eigenwert.

20. Zeige oder widerlege: Sind U_1, U_2, U_3 Unterräume von V , und ist $(U_1 \oplus U_2) \cap U_3 = 0$, so ist auch $U_1 \cap (U_2 \oplus U_3) = 0$.

21. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeige: Gilt $g_1 g_2 g_1 g_2 = 1$ für alle $g_1, g_2 \in G$, so ist $g = g^{-1}$ für alle $g \in G$.

Bemerkungen: Aufgabe 1 ist Teil von 1.1. Aufgaben 2 und 3 sind Teil von 1.3. Aufgabe 6 ist Teil von P1.2. Aufgabe 7 ist Teil von P1.3. Aufgabe 8 ist Teil von 2.3. Aufgabe 9 ist Teil von 2.3. Aufgabe 10 entspricht P2.1. Aufgabe 11 ist Teil von P2.2. Aufgabe 12 ist Teil von P2.3. Aufgaben 13 und 14: siehe 3.1. Aufgabe 15: siehe 3.3. Aufgabe 17 ist Teil von P3.3.