Typische Klausuraufgaben 3.

1. Bestimme die Jordansche Normalform für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Zeige: Ist A invertierbar, so gibt es ein Polynom $\phi \in K[T]$ mit Grad $n - 1$, sodass gilt:

$$A^{-1} = \phi(A).$$

3. Wie viele Ähnlichkeitsklassen nilpotenter 5×5 -Matrizen gibt es?

4. Wie viele selbstduale Partitionen von $n = 12$ gibt es?

5. Zeige: Ist $A \in M(n \times n, K)$ mit $A^2 + A + E_n = 0$, so ist A^3 diagonalisierbar.

6. Wie lautet das Minimalpolynom für die nilpotente Jordan-Matrix $J(17, 17, 5, 2)$?

7. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Zeige: Hat das Minimalpolynom μ_A mehrfache Nullstellen, so ist A nicht diagonalisierbar.

8. Seien U, U', W Unterräume des Vektorraums V . Sei $V = U \oplus U'$. Zeige: Ist $U \subseteq W$, so ist $W = U \oplus (U' \cap W)$.

9. Zeige: Ist das charakteristische Polynom χ_A der Matrix A irreduzibel, so ist $\mu_A = \chi_A$.

10. Betrachte die folgende reelle Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 13 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. Bestimme alle A -invarianten Unterräume von $\mathbb{R}^2$.

11. Sei $P \in GL(n, K)$. Zeige: Die Abbildung $A \mapsto P^{-1}AP$ ist ein Gruppen-Isomorphismus $GL(n, K) \rightarrow GL(n, K)$.

12. Betrachte den kanonischen unitären Raum $\mathbb{C}^3$. Normalisiere den Vektor $\begin{bmatrix} 1 + i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und ergänze zu einer Orthonormalbasis.

13. Zeige oder widerlege: Sind A, B symmetrische reelle $(n \times n)$ -Matrizen, so ist auch AB symmetrisch.

14. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Zeige: Ist das Minimalpolynom von A irreduzibel mit Grad t , so ist n ein ganz-zahliges Vielfache von t .

15. Sei $v \in \mathbb{C}^n$. Zeige: Ist $v^t \bar{w} = 0$ für alle $w \in \mathbb{C}^n$, so ist $v = 0$.

16. Betrachte die Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Man gebe eine invertierbare Matrix P an, sodass $P^{-1}AP$ eine Jordanmatrix ist.

17. Sei $U = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$. Man gebe eine Komplementärmatrix zu U in K^4 an.

18. Zeige: Ist die Matrix A unitär, so ist auch $\bar{A}$ unitär.

19. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:

- (1) Jede quadratische Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ ist diagonalisierbar.
- (2) Jede orthogonale Matrix besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.
- (3) Zu jeder diagonalisierbaren Matrix $\in M(n \times n, \mathbb{R})$ gibt es eine Orthonormalbasis des kanonischen euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren.
- (4) Ist $A \in M(n \times n, K)$ nilpotent, so ist $A^{n-1} = 0$.

20. Wie sehen die Jordanschen Normalformen der Matrizen A mit charakteristischem Polynom $\chi_A = T^4 - T^3$ aus ?

21. 1. Sei $A \in M(8 \times 8, \mathbb{R})$ nilpotent, für die Unterräume $\text{Kern}(A) = \text{Kern}(l_A)$ von K^n gelte:

$i =$	1	2	3
$\dim \text{Kern}(A^i) =$	2	4	5

Wie sieht die Jordan'sche Normalform von A aus?

Bemerkungen: Aufgabe 1: siehe 7.2. Aufgabe 2 ist Teil von 7.3. Zur Aufgabe 3 siehe 7.4. Aufgabe 4 ist Teil von 7.3 (hier einmal schwerer). Aufgabe 7 ist Teil von P7.5. Aufgabe 8 ist Teil von 8.1. Aufgabe 10 ist Teil von P8.2. Aufgabe 13 ist Teil von 9.2. Die Aufgaben 20 und 21 stammen vom Übungszettel zur Jordan'schen Normalform.