Typische Klausuraufgaben 4.

1. Die reelle Matrix
$$B = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & c_1 \\ \sin(t) & \cos(t) & c_2 \\ d_1 & d_2 & e \end{bmatrix}$$
sei orthogonal und es gelte $\det B = 1$. Wie sehen die Zahlen c_1, c_2, d_1, d_2, e aus?

2. Sei π eine Permutation von $\{1, 2, \dots, n\}$ und $A(\pi) = (a_{st})_{st} \in M(n \times n, \mathbb{R})$ die zugehörige Permutationsmatrix (mit $a_{\pi(t),t} = 1$ für $1 \le t \le n$ und $a_{st} = 0$ sonst). Zeige: $A(\pi)$ ist orthogonale Matrix.

3. Man diagonalisiere die komplexe Matrix
$$\begin{bmatrix} 4 & 3i \\ -3i & 4 \end{bmatrix}$$

4. Zeige: Es gibt nur eine nilpotente hermitesche Matrix in $M(n \times n, \mathbb{C})$.

5. Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ selbstadjungiert und unitär. Zeige: $A^2 = E_n$.

6. Bestimme alle Paare $(t, t') \in \mathbb{R}^2$, so dass die Matrizen
$$\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \cos t' & \sin t' \\ \sin t' & -\cos t' \end{bmatrix}$$
ähnlich sind.

7. Man gebe zwei hermitesche (2×2)-Matrizen A, B an, sodass AB nicht hermitesch ist.

8. Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ mit $A^t = -\overline{A}$. Zeige: Ist λ ein Eigenwert von A, so ist λ rein-imaginär.

9. Gesucht ist eine quadratische Form $q \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sodass die Nullstellenmenge $V(q)$ eine Parabel ist, und zwar soll eine der Hauptachsen die Ursprungsgerade durch $[1\ 1]^t$ sein.

10. Definiere eine Abbildung $\eta \colon (K^n, +) \to \mathrm{GL}(n+1, K)$ durch
$$\eta(v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & E_n \end{bmatrix}.$$

Zeige: Dies ist ein Gruppen-Homomorphismus.

11. Bestimme Hauptachsen für die reelle quadratische Form
$$X^2 + 3Y^2 + 2\sqrt{3}XY.$$

12. Sei $\langle -, - \rangle$ die durch die Matrix
$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$
gegebene Bilinearform auf $V = \mathbb{R}^4$. Gesucht sind zwei 2-dimensionale Unterräume $U \subset V$, auf denen $\langle -, - \rangle$ negativ definit ist.

13. Zeige oder widerlege: Ist A hermitesche $(n \times n)$-Matrix, so ist $|Av| = |v|$ für alle $v \in \mathbb{C}^n$.

14. Zeige oder widerlege: Ist A orthogonale $(n \times n)$-Matrix, und ist $Av = 0$, so ist $v = 0$.

15. Sei $A \in \mathcal{O}(n)$. Zeige: Ist 1 kein Eigenwert von A, so ist $\det A = -1$.

16. Zeige: Ist A unitäre Matrix, und ist $|\det A| = 1$.

17. Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein unitärer Raum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Zeige: $U \cap U^\perp = 0$.

18. Seien Q_1, Q_2 orthogonale $(n \times n)$-Matrizen, seien R_1, R_2 reelle obere Dreiecksmatrizen mit positiven Diagonalkoeffizienten. Zeige: Gilt $Q_1 R_1 = Q_2 R_2$, so ist $Q_1 = Q_2$ und $R_1 = R_2$.

19. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:
(1) Ist A orthogonale Matrix und λ ein Eigenwert von A, so ist $\lambda \in \mathbb{R}$.
(2) Ist A hermitesche Matrix und λ ein Eigenwert von A, so ist $|\lambda| = 1$.
(3) Ist A unitäre Matrix und λ ein Eigenwert von A, so ist $\lambda \in \mathbb{R}$.
(4) Ist A hermitesche Matrix und λ ein Eigenwert von A, so ist $\lambda \neq 0$.

20. Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein unitärer Vektorraum, sei $f\colon V \to V$ selbstadjungierter Endomorphismus. Zeige: Ist U ein f-invarianter Unterraum von V, so ist auch $U^\perp$ f-invarianter Unterraum.

21. Sei $f\colon V \to V$ Endomorphismus eines k-Vektorraums. Sei U ein f-invarianter Unterraum von V. Zeige: $f(U)$ ist ebenfalls f-invariant.

Bemerkungen. Aufgabe 1: siehe 10.1., Aufgabe 2 ist Teil von 10.4. Aufgabe 3 entspricht P10.2. Aufgabe 4 ist P10.4. Aufgabe 5 ist Teil von P10.5. Aufgabe 6 ist Teil von 11.1. Aufgabe 7 ist Teil von 11.2. Aufgabe 8 ist 11.3. Aufgabe 9: siehe P11.3. Aufgabe 10: siehe 12.1. Aufgabe 11: siehe 12.3. Aufgabe 12 entspricht einem Teil von P12.2.