Typische Klausuraufgaben 5.

1. Sei $p(X,Y,Z) = X^2+Y^2-Z^2-1$. Der Punkt $(1,0,0) \in \mathbb{R}^3$ gehört offensichtlich zu $F = V(p)$. Zeige: Die Gerade durch $(1,1,1)$ mit Richtungsvektor $(0,1,1)$ liegt auf der Fläche F.

2. Sei $A \in M(n,\mathbb{R})$ symmetrisch. Setze $f(x) = x^tAx$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige: Die Menge

$$Z(f) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = f(x+z) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n\}$$

ist ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

3. Sei β eine Gleitspiegelung im $\mathbb{R}^2$. Zeige: β^2 ist eine Translation.

4. Gegeben sei das quadratische Polynom

$$q(X,Y) = X^2+2XY+Y^2-2X-2Y+1.$$

Ist die Nullstellenmenge $V(q)$ eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel?

5. Man bestimme die Hauptachsen der Quadrik

$$4X^2-2XY+4Y^2 = 4.$$

6. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:

(1) Jeder Punkt auf einem einschaligen Hyperboloid F liegt auf zwei Geraden, die ganz in F enthalten sind.
(2) Ein zweischaliges Hyperboloid enthält keine Geraden.
(3) Ein elliptisches Paraboloid enthält keine Geraden.
(4) Jeder Punkt auf einem hyperbolischen Parabolid F liegt auf zwei Geraden, die ganz in F enthalten sind.

7. Mit Hilfe des Hauptminoren-Kriteriums entscheide man, ob die Bilinearformen $\langle -,-\rangle_A$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

positive definit ist oder nicht.

8. Gegeben seien Friese, wie man sie etwa unter

http://www.math.uni-bielefeld.de/birep/la2/friese.html findet. Man bestimme jeweils den Typ der zugehörigen Fries-Gruppe (das Bestimmungsblatt darf verwendet werden).

9. Gegeben seien Muster, wie man sie etwa unter

`http://www.math.uni-bielefeld.de/birep/la2/muster.html`

findet. Man bestimme jeweils den Typ der zugehörigen ebenen Kristallgruppe (das Bestimmungsblatt darf verwendet werden).

10. Betrachte das regelmäßige 17-Eck

$$X = \{(\cos\frac{2t\pi}{17}, \sin\frac{2t\pi}{17}) \mid 0 \leq t < 17\}$$

im $\mathbb{R}^2$ und seine Symmetrie-Gruppe G. Wieviele eigentliche und wieviele uneigentliche Bewegungen gehören zu G?

11. Beweis: Der Kern eines Gruppenhomomorphismus ist eine Untergruppe.

12. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:
(1) Der Polynomring $K[X]$ in einer Variablen X mit Koeffizienten in einem Körper K ist wieder ein Körper.
(2) $\mathbb{N}_0$ ist ein Ring.
(3) $\mathrm{GL}(n, K)$ ist ein Ring.
(4) Die Untermenge $\{0, 1\}$ von $\mathbb{Z}$ ist ein Unterring.

13. Sei $\phi \in \mathcal{B}(2)$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:
(1) Hat ϕ einen Fixpunkt, so ist ϕ eine Drehung.
(2) Hat ϕ keinen Fixpunkt, so ist ϕ eine Translation.
(3) Ist ϕ eine Translation, so gibt es unendlich viele Fixgeraden.
(4) Gibt es einen und nur einen Fixpunkt, so ist ϕ eine Drehung.

14. Betrachte die Menge L der Matrizen der Form

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{Q}.$$

Es sei schon gezeigt, dass die Menge L ein Unterring von $M(2 \times 2, \mathbb{Q})$ ist. Man beweise, dass L ein Körper ist.

15. Man beweise mit Hilfe der Matrizen-Multiplikation: Die Hintereinanderschaltung zweier Spiegelungen an Ursprungsgeraden ist eine Drehung um den Ursprung.

16. Wie sehen alle (2×2)-Matrizen A mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ aus, sodass das Bild von f_A die Diagonale $\{(r, r) \mid r \in \mathbb{R}\}$ ist?

Bemerkungen. Aufgabe 1: siehe 13.1. Aufgabe 2 ist Teil von 13.2. Aufgabe 3 ist Teil von 13.3. Aufgabe 4: siehe P13.2. Aufgabe 5: siehe P13.1. Aufgabe 7: siehe Aufgabe P14.1. Die Aufgaben 8 und 9 sind P14.2 und P14.3.