

Übungsaufgaben 10.

1. Noch einmal die Aufgabe 7.1 (c). Sei k ein Körper der Charakteristik 0. Sei $k[X_1, Y_1, X_2, Y_2]$ der Polynomring in den vier Variablen X_1, Y_1, X_2, Y_2 mit Koeffizienten in k . Wir ordnen dem Monom $X_1^a Y_1^b X_2^c Y_2^d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{N}_0$ den *Bigrad* $(a + b, c + d)$ zu, und nennen $p \in k[X_1, Y_1, X_2, Y_2]$ *homogen vom Bigrad* (s, t) , wenn p eine Linearkombination von Monomen vom Bigrad (s, t) ist. Wir bezeichnen mit $M_{st} = k[X_1, Y_1, X_2, Y_2]_{st}$ den Unterraum der homogenen Polynome $p \in M = k[X_1, Y_1, X_2, Y_2]$ vom Bigrad (s, t) .

Definiere Endomorphismen e, f des k -Vektorraums M durch

$$e = Y_1 \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} + Y_2 \cdot \frac{\partial}{\partial X_2}, \quad \text{und} \quad f = X_1 \cdot \frac{\partial}{\partial Y_1} + X_2 \cdot \frac{\partial}{\partial Y_2}.$$

und setze $h = [e, f]$.

Zeige: Sei $s \geq t$. Dann ist der Modul $(M_{st}; e, f, h)$ isomorph zu

$$M(s + t) \oplus M(s + t - 2) \oplus \cdots \oplus M(s - t).$$

Bemerkung. Hier soll (unter Verwendung der Ergebnisse, die in der Vorlesung gezeigt wurden) ein **knapper (aber vollständiger)** Beweis notiert werden! Beachte: **Es soll nur gezeigt werden, dass es einen Isomorphismus gibt.**

Ein Isomorphismus muss dafür **nicht** angegeben werden, **und soll auch nicht angegeben werden.**

Aus der Vorlesung wissen wir, dass sich der Modul als direkte Summe einfacher Moduln schreiben lässt, man muss also nur die Multiplizitäten bestimmen. In der Vorlesung wurde gezeigt, wie man diese Multiplizitäten berechnen kann. Nur dies ist zu tun.

Oft ist es sehr einfach zu zeigen, dass zwei Moduln isomorph sind, während es schwierig ist, einen Isomorphismus wirklich anzugeben. Die neuerliche Aufgabenstellung soll dies betonen.

2. Sei Φ ein Wurzelsystem in euklid'schen Raum $(E, \langle -, - \rangle)$ und W die zugehörige Weylgruppe. Man zeige

- (a) Ist Δ eine Wurzelbasis und $w \in W$, so ist $w(\Delta)$ eine Wurzelbasis.
- (b) Sind Δ, Δ' Wurzelbasen, so gibt es $w \in W$ mit $w(\Delta) = \Delta'$.
- (c) Ist Δ eine Wurzelbasis und $w \in W$ mit $w(\Delta) = \Delta$, so ist $w = 1$.

3. Sei Φ ein Wurzelsystem in euklid'schen Raum $(E, \langle -, - \rangle)$ und W die zugehörige Weylgruppe.

Sei $\lambda \in \Lambda^+ = \{x \in E \mid \langle \alpha, x \rangle \in \mathbb{N}_0 \text{ für alle } \alpha \in \Phi^+\}$.

Sei $\sigma \in W$. Zeige: $\sigma(\lambda + \delta) - \delta$ gehört nur für $\sigma = 1$ zu Λ^+ .

4. Sei $H \subset \mathbb{F}_2^7$ der Hamming-Code. Dann ist der duale Code $H^\perp$ der von den Zeilen der folgenden Matrix erzeugte Unterraum:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Man zeige: $H^\perp$ ist ein $[7, 3, 4]$ -Code, insbesondere also double-even. Insbesondere ist $\Phi(H^\perp)$ ein Wurzelsystem. Man bestimme $|\Phi(H^\perp)|$.

Abgabe: Donnerstag, 05.01.2006