

Übungsaufgaben 11.

1. Sei $V = M(n \times n, \mathbb{C})$ die Menge der $(n \times n)$ -Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$. Definiere Abbildungen $e, f: V \rightarrow V$ durch $e(A) = E_{12}A - AE_{12}$, und $f(A) = E_{21}A - AE_{21}$, für alle $A \in V$. Setze $h = [e, f]$. Zeige: (e, f, h) ist ein $\mathfrak{sl}_2$ -Tripel. Schreibe V als direkte Summe einfacher $\mathfrak{sl}_2$ -Moduln.

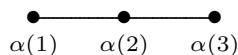
2. Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume, seien $f: V \rightarrow W$ und $g: W \rightarrow V$ lineare Abbildungen. Bekanntlich gilt: $\text{spur}(fg) = \text{spur}(gf)$.

Verwende dies im Rahmen von $\mathfrak{sl}_2$ -Moduln: Sei (e, f, h) ein Standard-Tripel auf dem Vektorraum V . Wie läßt sich die Dimension von V_s berechnen, wenn man die Dimensionen von V_{s+2t} mit $t \in \mathbb{N}_1$ und die Spur von $ef|_{V_s}$ kennt?

Sei nun $\Phi \subset E$ ein Wurzelsystem mit Weylgruppe W .

3. Sei Δ eine Wurzelbasis von Φ . Für $x \in E$ bezeichnet man mit $p(x)$ die Anzahl der Funktionen $f: \Phi^+ \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $\sum_{\alpha \in \Phi^+} f(\alpha)\alpha = x$. (Man nennt dies die **Kostant'sche Partitionsfunktion**, denn $p(x) = n$ besagt gerade, daß man x auf n verschiedene Weisen als Summe positiver Wurzeln schreiben kann.)

Im Fall des Wurzelsystems A_3 mit Wurzelbasis $\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3)$ und Dynkin-Diagramm



bestimme man $p(\alpha(1) + 2\alpha(2) + \alpha(3))$. (Dafür muß man natürlich zuerst einmal überlegen, wie alle positiven Wurzeln aussehen ...)

4. Sei Λ das zugehörige Gewichtsgitter. Sei $\text{Abb}(\Lambda, \mathbb{C})$ die Menge der Funktionen $f: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$. Ist $\lambda \in \Lambda$, so sei $e[\lambda]$ die zugehörige charakteristische Funktion (also $e[\lambda]_\mu = 1$ falls $\mu = \lambda$, und sonst $e[\lambda]_\mu = 0$).

Eine solche Funktion f heißt W -symmetrisch, wenn

$$(*) \quad f_{w\lambda} = f_\lambda \quad \text{für alle } w \in W$$

gilt. Eine Funktion $f: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ heißt W -alternierend, wenn

$$(**) \quad f_{w\lambda} = (-1)^{l(w)} f_\lambda \quad \text{für alle } w \in W$$

gilt. Ist $\lambda \in \Lambda$, so setzen wir $s[\lambda] = \sum_{w \in W} e[w\lambda]$ und $a[\lambda] = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e[w\lambda]$.

(a) Zeige: $s[\lambda]$ ist W -symmetrisch, und $a[\lambda]$ ist W -alternierend.

(b) Zeige: es genügt natürlich, die Bedingungen $(*)$ und $(**)$ für alle Spiegelungen $w = \sigma_{\alpha(i)}$ einer Wurzelbasis $\alpha(1), \dots, \alpha(r)$ nachzuweisen.

(c) Zeige: Die Menge $\text{Abb}(\Lambda, \mathbb{C})^W$ der W -symmetrischen Funktionen, wie auch die Menge der W -alternierenden Funktionen bilden Untervektorräume von $\text{Abb}(\Lambda, \mathbb{C})$; und es gilt: die Menge $\text{Abb}(\Lambda, \mathbb{C})^W$ ist auch ein Unterring von $\text{Abb}(\Lambda, \mathbb{C})$.