

Übungsaufgaben 12.

1. Sei Φ ein Wurzelsystem mit Weylgruppe W , sei Λ das zugehörige Gewichtsgitter. Wir betrachten Funktionen $f: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$. Sei Δ eine Wurzelbasis. Es sei daran erinnert, daß man $\lambda \in \Lambda$ *stark dominant* nennt, falls $\frac{2\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{N}_1$ für alle positiven Wurzeln α gilt. Man bezeichnet mit Λ^{++} die Menge der stark dominanten Gewichte. Ist $\lambda \in \Lambda$, so wurden die Funktionen $s[\lambda]$ und $a[\lambda]$ auf Blatt 11 definiert.

(a) Zeige: Ist $\lambda \in \Lambda^{++}$, so ist

$$a[\lambda]_\mu = \begin{cases} (-1)^{l(w)} & \text{falls } \mu = w\lambda \text{ für ein } w \in W \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Der Träger von $a[\lambda]$ ist also gerade der W -Orbit von λ . Ist λ dagegen in $\Lambda^+ \setminus \Lambda^{++}$, so ist $a[\lambda] = 0$.

(b) Zeige: Eine W -symmetrische Funktion $f: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ ist durch ihre Einschränkung auf Λ^+ eindeutig bestimmt. Eine W -alternierende Funktion f ist durch ihre Einschränkung auf Λ^{++} eindeutig bestimmt und es gilt $f(\lambda) = 0$ für $\lambda \in \Lambda^+ \setminus \Lambda^{++}$.

2. Verwende die Weyl'sche Produktformel, um zu zeigen: Es ist

$$a[\delta] * a[\delta] = (-1)^m \prod_{\alpha \in \Phi} (e[\alpha] - 1) \quad \text{mit} \quad m = |\Phi^+|.$$

3. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Zeige: Durch ad with $\mathfrak{g}$ ein $\mathfrak{g}$ -Modul. Zeige: Ist $\mathfrak{g}$ einfache Lie-Algebra, so ist dieser $\mathfrak{g}$ -Modul irreduzibel. Bestimme im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ einen Höchstgewichtsvektor.

4. (a) Sei I ein Ideal der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Zeige: Der Faktorraum $\mathfrak{g}/I$ wird durch $[\bar{x}, \bar{y}] = \overline{[x, y]}$ eine Lie-Algebra (dabei bezeichnen wir wie üblich mit $\bar{x} = x + I$ die Restklasse von x modulo I) und die kanonische Abbildung $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/I$ (sie ist durch $x \mapsto \bar{x}$ definiert) ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus. (Hinweis: Was ist hier zu zeigen? Vor allem, daß die Lie-Klammer $[-, -]$ auf $\mathfrak{g}/I$ überhaupt wohl-definiert ist!)

(b) Sei $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus. Zeige: Die Menge

$$\text{Im } \phi = \{\phi(x) \mid x \in \mathfrak{g}\}$$

ist eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}'$ und $\text{Im } \phi$ ist zur Lie-Algebra $\mathfrak{g}/I$ isomorph – man erhält einen Isomorphismus $\mathfrak{g}/I \rightarrow \text{Im } \phi$ durch $\bar{x} \mapsto \phi(x)$. (Wieder ist als erstes zu zeigen, daß die Abbildung $\bar{x} \mapsto \phi(x)$ wohl-definiert ist!)