

Übungsaufgaben 13.

1. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Berechnen Sie explizit $\kappa(\alpha, \alpha)$ für $\alpha \in \Phi$ (und damit $\kappa(\alpha, \beta)$ für jedes Wurzelpaar α, β).

Zusatzaufgabe: Betrachte auch die anderen klassischen Lie-Algebren.

2. Sei $G = (G, \circ)$ eine Gruppe, k ein Körper. Mit kG bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f: G \rightarrow k$ mit endlichem Träger; das Bild von $a \in G$ unter f werde als f_a notiert. Auf kG ist durch

$$(f * g)_c = \sum_{a, b \in G, a \circ b = c} f_a g_b$$

eine Multiplikation definiert. Man nennt kG den *Gruppenring* der Gruppe G mit Koeffizienten in k . Für $g \in G$ bezeichnen wir mit $e[g]$ die charakteristische Funktion $G \rightarrow k$, also $e[g]_g = 1$ und $e[g]_a = 0$ für $g \neq a \in G$. Zeige:

(a) Es ist kG ein Ring, dabei ist $e[1_G]$ das Einselement. Ist G kommutativ, so ist kG kommutativer Ring.

(b) Zeige: Die Zuordnung $g \mapsto e[g]$ liefert einen Gruppen-Isomorphismus

$$(G, \circ) \rightarrow (\{e[g] \mid g \in G\}, *).$$

(c) Ist $\Lambda = (\mathbb{Z}^n, +)$ (also ein Gitter), so ist der Ring $k\Lambda$ nullteilerfrei, aber für $n > 0$ kein Körper.

3. Seien x, y, h Elemente einer Lie-Algebra und $a, b \in k$ mit

$$[x, y] = h, \quad [h, x] = ax, \quad [h, y] = by.$$

Man zeige: Ist $x \neq 0$ und $y \neq 0$, so gilt $b = -a$.

4. Sei k ein Körper. In der Vorlesung wurde jeder Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ die universelle Einhüllende $U(\mathfrak{g})$ und eine Abbildung $\iota_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$ zugeordnet. Zeige: $U(-)$ ist ein Funktor von der Kategorie der k -Lie-Algebren in die Kategorie der Ringe, und ι_- ist eine natürliche Transformation. Das soll heißen: Zu jedem Lie-Algebren-Homomorphismus $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ gibt es einen Ring-Homomorphismus $U(\phi)$ mit $\iota_{\mathfrak{g}'} \phi = U(\phi) \iota_{\mathfrak{g}}$, es ist $U(1_{\mathfrak{g}}) = 1_{U(\mathfrak{g})}$ und sind Lie-Algebren-Homomorphismen $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ und $\phi': \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}''$ gegeben, so gilt $U(\phi' \phi) = U(\phi') U(\phi)$.