

Übungsaufgaben 1.

Moduln

Sei k ein Körper.

1. Sei

$$M = (k^2, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}).$$

- (a) Zeige: $R = \text{End}(M)$ ist die Menge der Matrizen der Form $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ mit $a, b \in k$.
 (b) Bestimme alle Idempotente e in R .
 (c) Bestimme alle direkten Modul-Zerlegungen $M = M_1 \oplus M_2$.

2. Sei

$$M = (k^3, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}).$$

- (a) Zeige: $\text{End}(M)$ ist die Menge der Matrizen der Form

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \text{mit } a, b, c \in K.$$

- (b) Folgere daraus: M ist unzerlegbar.
 (c) Zeige: Dieser Modul ist nicht einfach.

3. Sei I eine Menge. Zeige: Die Menge der eindimensionalen I -Moduln entspricht bijektiv den (mengentheoretischen) Abbildungen $I \rightarrow k$, und zwar ordnet man jeder Abbildung $\lambda: I \rightarrow k$ den Modul $(k, [\lambda(i)]_{i \in I})$ zu (dabei ist $[\lambda(i)]$ die (1×1) -Matrix mit dem Koeffizienten $\lambda(i)$). Zeige weiter, dass zwei derartige Moduln nur dann isomorph sind, wenn sie gleich sind.

4. Betrachte die folgende $(n \times n)$ -Matrix mit Koeffizienten in k

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1},$$

sei $M = K^n$.

- (a) Zeige: Der Modul (M, A, E_{n1}) ist einfach.
 (b) Man gebe einige andere $(n \times n)$ -Matrizen B an, so dass (M, A, B) einfach ist.

Jede Woche gibt es einen Übungszettel, der üblicherweise in der Dienstags-Vorlesung verteilt wird (diesmal erst am Donnerstag).

Die Lösungen sind jeweils am darauffolgenden Dienstag 8:10 Uhr abzugeben (ins Postfach des Übungsleiters) — auch diesmal sind die Lösungen schon am Dienstag, 24.10.2005, abzugeben, dafür sind alle vier Aufgaben aber eher Routine-Aufgaben.

Üblicherweise gibt es vier Aufgaben, für jede vollständig gelöste Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Lösungen der Aufgaben dürfen in n -Gruppen mit $n \leq 3$ abgegeben werden (also allein oder in Zweier- oder Dreiergruppen). Der entsprechende Lösungszettel muß jeweils auch n Handschriften aufweisen, und jeder der Beteiligten muß bereit sein, **jede** der notierten Aufgaben vorzurechnen - nicht nur die mit der eigenen Handschrift! (Bei jeder der Aufgaben darf natürlich notiert werden, dass nur eine Teilmenge der Gruppe diese Lösung vorlegt und davor verantwortlich zeichnet).

Die Lösungen sind auf DIN A4-Blättern abzugeben: im Kopf eines jeden Blatts sind der oder die Name(n) zu notieren.

Wichtig sind: lesbare Schrift, jeweils vollständige Sätze. In der Vorlesung bewiesene Sachverhalte dürfen verwendet werden, **alles andere ist zu beweisen**.

Die Aufgaben werden korrigiert, bewertet und in der Übungsstunde besprochen. Üblicherweise werden Lösungen (oder auch partielle Lösungsansätze) von den Übungsteilnehmern an der Tafel vorgetragen, dabei sollen Formulierungen und Beweisideen von den übrigen Studierenden (und natürlich auch vom Übungsleiter) immer hinterfragt, gegebenenfalls auch korrigiert werden.

Die Dienstags-Vorlesung findet in Zukunft im Hörsaal H 10 statt.