

Übungsaufgaben 2. Moduln.

Sei k ein Körper.

1. Sei

$$M = (k^3, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}).$$

- (a) Bestimme $R = \text{End}(M)$ (als Menge von (3×3) -Matrizen).
- (b) Bestimme alle Idempotente e in R .
- (c) Bestimme alle direkten Modul-Zerlegungen $M = M_1 \oplus M_2$. (mit Zeichnung für den Fall $k = \mathbb{R}$).
- (d) Man gebe dabei die Zuordnung $e \mapsto (\text{Im}(e), \text{Ker}(e))$ an (dabei ist e ein Idempotent in R).

2. Sei $k[T]$ der k -Vektorraum aller Polynome (in einer Variablen T) mit Koeffizienten in k . Betrachte die beiden Endomorphismen $\phi_i: k[T] \rightarrow k[T]$

$$\phi_1(p) = T \cdot p, \quad \phi_2(p) = p' \quad (\text{die formale Ableitung von } p)$$

(zur formalen Ableitung eines Polynoms siehe z.B. die Aufgabe LA I 12.4 oder LA II 4.4).

- (a) Zeige $[\phi_1, \phi_2] = 1$ (die identische Abbildung).
- (b) Bestimme den Endomorphismenring $\text{End}(k[T], \phi_1, \phi_2)$.

3. Sei (V, ϕ_1, ϕ_2) ein Modul mit $V \neq 0$ und $[\phi_1, \phi_2] = 1$ (die identische Abbildung). Zeige: Ist die Charakteristik von k gleich 0, so ist V unendlich-dimensional.

Hinweis: Man nimmt an, dass V endlich-dimensional ist, und führt dies zu einem Widerspruch. Es empfiehlt sich, an die Spur (von Endomorphismen von V) zu denken — welche Endomorphismen sollte man betrachten?

4. (a) Jeder einfache 1-Modul ist endlich-dimensional.

(b) Ist k algebraisch abgeschlossen, so sind alle einfachen 1-Moduln eindimensional.

(c) Ist $k = \mathbb{R}$, so ist jeder einfache 1-Modul ein- oder zwei-dimensional.

Hinweis: Wichtig ist, (a) zu zeigen. Denn (b) und (c) wurden für endlich-dimensionale 1-Moduln im wesentlichen schon in der Vorlesung LA II bewiesen. Wie zeigt man (a)? Ist $M = (M, \phi)$ ein einfacher 1-Modul, so nehme man sich ein Element $0 \neq x \in M$ und betrachte die Folge der Elemente $\phi^t(x)$ mit $t \in \mathbb{N}_0$. Zeige: Der von dieser Folge erzeugte Unterraum U ist ein Untermodul. Weil M einfach ist, ist also $M = U$. Entweder sind die Elemente $\phi^t(x)$ linear unabhängig — oder sie sind linear abhängig...