

Übungsaufgaben 3. Beweise.

Sei k ein Körper, I eine Menge.

1. Ein Modul I -Modul $M = (M, \phi_i)_{\phi_i \in I}$ heißt *zyklisch*, falls es ein Element $x \in M$ mit folgender Eigenschaft gibt: Ist U ein Untermodul von M mit $x \in U$, so ist $U = M$.

(a) Zeige: Bilden die Untermoduln des endlich-dimensionalen Moduls M eine Kette (d.h. sind U, U' Untermoduln von M , so ist $U \subseteq U'$ oder $U' \subseteq U$), so ist U zyklisch.

(b) Die Umkehrung gilt nicht. Zeige: Der folgende 1-Modul ist für $\gamma \neq \gamma'$ zyklisch:

$$(k^n, J(\gamma, n)) \oplus (k^m, J(\gamma', m)).$$

(c) Und auch: Die Untermoduln des 1-Moduls $M = (k[T], d/dt)$ bilden eine Kette, aber M ist nicht zyklisch.

2. Man beweise die folgenden Aussagen (Noether'sche Isomorphie-Sätze): Seien M, N I -Moduln.

- (a) Ist $f: M \rightarrow N$ ein surjektiver Modul-Homomorphismus, und ist $K = \text{Ker}(f)$, so ist N isomorph zu M/K .
- (b) Sind $K \subseteq L \subseteq M$ Untermoduln, so ist M/L isomorph zu $(M/K)/(L/K)$.
- (c) Sind H, K Untermoduln von M , so ist $(H + K)/K$ isomorph zu $H/(H \cap K)$.

3. Seien M, N I -Moduln. Wir bilden den Modul $M \times N$. Zeige: Ordnet man dem Modul-Homomorphismen $f: M \rightarrow N$ seinen Graph $\{(x, f(x)) \mid x \in M\}$ zu, so erhalten wir eine Bijektion zwischen der Menge $\text{Hom}(M, N)$ und der Menge der Untermoduln $U \subseteq M \times N$ mit $U \oplus (0 \times N) = M \times N$.

4. Sei M ein unzerlegbarer I -Modul mit folgender Eigenschaft: Es gibt endlich-dimensionale Unterräume U_j ($j \in J$) mit $f(U_j) \subseteq U_j$ für jeden Endomorphismus f von M und jedes $j \in J$, sodass gilt $M = \sum_{j \in J} U_j$. Zeige: Der Endomorphismenring von M ist ein lokaler Ring. (Achtung: Wir verlangen nicht, dass die Unterräume U_j Untermoduln sind!)

Hilfe: Zeige: Ist U n -dimensionaler Unterraum von M mit $g(U) \subseteq U$ für jeden Endomorphismus g von M , so gilt: Ist f ein Endomorphismus von M , so gilt

$$U = (\text{Ker}(f^n) \cap U) \oplus f^n(U).$$

Folgere daraus: Ist f ein Endomorphismus von M , der nicht invertierbar ist, und ist $x \in M$, so gibt es $n(x) \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{n(x)}(x) = 0$ (man nennt dann f einen lokal-nilpotenten Endomorphismus).

Abgabe: Di, 8.11.2005, 10:00. (Erinnerung: am 8.11. ist keine Vorlesung.)

Übungsaufgaben 4.

sl₂-Moduln.

- 1.** Sei (e, f, h) ein Standard-Tripel auf dem Vektorraum V . Zeige:
- (1) $(f, e, -h)$ ist ein Standard-Tripel auf dem Vektorraum V .
 - (2) $(-f, -e, -h)$ ist ein Standard-Tripel auf V und
 - (3) (f^*, e^*, h^*) ist ein Standard-Tripel auf dem Dualraum $V^* = \text{Hom}_k(V, k)$.

2. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\text{char } k \neq 2$. Sei $\text{sl}_2(k)$ die Menge der (2×2) -Matrizen mit Koeffizienten in k und Spur 0. Zeige: Jedes Element in $\text{sl}_2(k)$ ist ähnlich zu einer Matrix der Form $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ oder $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}$ mit $c \in k$.

Folgere (Jacobson-Morozov für $\text{sl}_2(k)$): Jedes nilpotente Element e in $\text{sl}_2(k)$ gehört zu einem Standard-Tripel (e, f, h) .

3. Beispiel. Sei k ein beliebiger Körper der Charakteristik 0. Sei $k[X, Y]$ der Polynomring in den zwei Variablen X, Y mit Koeffizienten in k . Ist $t \in \mathbb{N}_0$, so bezeichnet man mit $k[X, Y]_t$ den Unterraum der homogenen Polynome vom Grad t . (Dabei ordnet man dem Monom $X^a Y^b$ mit $a, b \in \mathbb{N}_0$ den Grad $a + b$ zu, und man nennt $p \in k[X, Y]$ homogen vom Grad t , wenn p eine Linearkombination von Monomen vom Grad t ist.)

Definiere Endomorphismen e, f des k -Vektorraums $V = k[X, Y]$ durch

$$e = Y \cdot \frac{\partial}{\partial X}, \quad \text{und} \quad f = X \cdot \frac{\partial}{\partial Y}$$

(ist also $p \in k[X, Y]$, so erhält man $e(p)$, in dem man zuerst die partielle Ableitung $\frac{\partial p}{\partial X}$ bildet und das so entstandene Polynom mit Y multipliziert, entsprechend erhält man $f(p)$, in dem man die partielle Ableitung von p nach Y mit X multipliziert). Setze $h = [e, f]$. Zeige: (e, f, h) ist ein Standard-Tripel und für $t \in \mathbb{N}_0$ gilt: der Unterraum $k[X, Y]_t$ der Polynome vom Grad t ist ein Untermodul, der zu $M(t)$ isomorph ist.

Hinweis: Die Monome $X^a Y^b$ mit $a, b \in \mathbb{N}_0$ bilden eine Basis des Vektorraums $k[X, Y]$, es genügt daher, die definierenden Relationen auf dieser Basis zu verifizieren. Man berechne also zuerst $h(X^a Y^b)$ und zeige dann

$$[h, e](X^a Y^b) = 2e(X^a Y^b) \quad \text{und} \quad [h, f](X^a Y^b) = -2f(X^a Y^b).$$

3. Endomorphismenringe. Sei k ein Körper mit $\text{char } k = 0$. Sei $t \in \mathbb{N}_0$. Zeige: Der Endomorphismenring von $\text{End}(M(t))$ ist k .

Abgabe: Dienstag, 15.11.2005, 8:25.