

Übungsaufgaben 5.

1. (a) Sei k ein Körper. Sei V ein Vektorraum, $f: V \rightarrow V$ linear. Es gebe eine Menge endlich-dimensionaler f -invarianter Unterräume U_j ($j \in J$) von V mit $V = \sum_j U_j$. Zeige:

$$V = \left(\bigcup_i \operatorname{Ker}(f^i) \right) \oplus \left(\bigcap_i \operatorname{Im}(f^i) \right)$$

(Hinweis: Zeige zu erst: Zu jedem $x \in V$ gibt es einen endlich-dimensionalen f -invarianten Unterraum U mit $x \in U$.)

(b) Man verwende (a) um die Aufgabe 3.4 nun endlich zu lösen!

$\mathfrak{sl}_2$ -Moduln

2. Sei k ein Körper der Charakteristik 0 und sei $\lambda \in k$. Sei V ein Vektorraum mit Basis v_i mit $i \in \mathbb{N}_0$ (insbesondere gilt: V ist unendlich-dimensional). Setze $f(v_i) = v_{i+1}$ und $e(v_i) = i(\lambda + 1 - i)v_{i-1}$ für alle $i \geq 0$ (dabei sei $v_{-1} = 0$ gesetzt) und $h = [e, f]$. Zeige:

(a) $\Delta(\lambda) = (V, e, f, h)$ ist ein $\mathfrak{sl}_2$ -Modul.

(b) Genau dann ist der Modul $\Delta(\lambda)$ ein einfacher Modul, wenn $\lambda \notin \mathbb{N}_0$ gilt.

(c) Sei $\lambda \in \mathbb{N}_0$. Dann besitzt der Modul $\Delta(\lambda)$ einen Untermodul U , der zu $\Delta(-\lambda - 2)$ isomorph ist und $\Delta(\lambda)/U$ ist zu $M(\lambda)$ isomorph. Es gibt genau drei Untermoduln von $\Delta(\lambda)$, insbesondere ist Δ unzerlegbar.

(Man nennt $\Delta(\lambda)$ den *Verma-Modul* zum Gewicht λ .)

3. Man nennt einen $\mathfrak{sl}_2$ -Modul $M = (M, e, f, h)$ einen Gewichtsmodul, falls M die direkte Summe der Eigenräume von h ist und diese Eigenräume endlich-dimensional sind.

(a) Zeige: Ist M ein unzerlegbarer $\mathfrak{sl}_2$ -Modul, der ein Gewichtsmodul ist, so ist sein Endomorphismenring lokal.

(b) Insbesondere gilt also: Verma-Moduln haben lokalen Endomorphismen-Ring. Nun soll aber explizit der Endomorphismenring eines jeden Verma-Moduls berechnet werden.

4. **Zur Definition des Casimir-Elements.** Sei k ein Körper mit $\operatorname{char} k \neq 2$. Betrachte die Spurform $\langle A, B \rangle = \operatorname{spur}(AB)$ auf der Menge aller (2×2) -Matrizen mit Koeffizienten in k . Zeige:

(a) Sei $\mathfrak{sl}_2(k)$ der Vektorraum aller (2×2) -Matrizen mit Koeffizienten in k und Spur Null. Zeige: die Spurform auf $\mathfrak{sl}_2(k)$ ist eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform und die zu (E, F, H) duale Basis ist $(F, E, \frac{1}{2}H)$.

(b) Ist A_1, A_2, A_3 eine beliebige Basis von $\mathfrak{sl}_2(k)$ und B_1, B_2, B_3 die dazu duale Basis (wieder bezüglich der Spurform), so ist $\sum A_i B_i = EF + FE + \frac{1}{2}H^2$.

(Bemerkung: Diese Rechnungen verdeutlichen die Bildung des Casimir-Elements zu $\mathfrak{sl}_2(k)$: nimm bezüglich der Spurform duale Basen A_1, A_2, A_3 und B_1, B_2, B_3 von $\mathfrak{sl}_2(k)$ und bilde $C = \sum A_i B_i$.)