

Übungsaufgaben 6. Verschiedenes.

1. In der Aufgabe 5.2 wurde für $\lambda \in \mathbb{N}_0$ ein unzerlegbarer sl_2 -Modul $\Delta(\lambda)$ konstruiert, der einen Untermodul U besitzt, der zu $\Delta(-\lambda - 2)$ isomorph ist, und sodass $\Delta(\lambda)/U$ zu $M(\lambda)$ isomorph ist.

Nun soll für $\lambda \in \mathbb{N}_0$ ein unzerlegbarer Modul $\nabla(\lambda)$ mit einem Untermodul U' konstruiert werden, sodass U' zu $M(\lambda)$ isomorph ist, während ∇/U zu $\Delta(-\lambda - 2)$ isomorph ist.

2. Sei R ein Ring, seien $r_1, r_2, r_3 \in R$. Zeige

$$\begin{aligned} [r_1, [r_2, r_3]] + [r_2, [r_3, r_1]] + [r_3, [r_1, r_2]] &= 0, \\ [r_1, [r_2, r_3]] &= [[r_1, r_2], r_3] + [r_2, [r_1, r_3]]. \end{aligned}$$

Insbesondere gelten diese Gleichungen also, wenn V ein Vektorraum und r_1, r_2, r_3 Endomorphismen von V sind.

Zusatzfrage: Wie hängen die beiden Gleichungen zusammen?

3. Konstruieren Sie für jedes $n \geq 2$ eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die **nicht** längenerhaltend ist, für die aber $f^{n-1} \neq 1$ und $f^n = 1$ gilt.

4. Sei k ein Körper.

(a) Betrachten Sie die Menge L der $(2n \times 2n)$ -Matrizen, die folgende Blockstruktur haben:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad D = -{}^t A, \quad B = {}^t B, \quad C = {}^t C$$

(mit $(n \times n)$ -Matrizen A, B, C, D). Zeigen Sie: Die Menge L ist ein Untervektorraum und abgeschlossen unter Kommutator-Bildung. Welche Dimension hat L ?

(b) Betrachten Sie die Menge L' der $(2n \times 2n)$ -Matrizen, die folgende Blockstruktur haben:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad D = -{}^t A, \quad B = -{}^t B, \quad C = -{}^t C$$

(mit $(n \times n)$ -Matrizen A, B, C, D). Zeigen Sie: Die Menge L ist ein Untervektorraum und abgeschlossen unter Kommutator-Bildung. Welche Dimension hat L' ?

(c) Suchen Sie nach einfach zu notierenden Standard-Tripeln (e, f, h) in L und in L' ("einfach zu notieren": zum Beispiel solche, bei denen e höchstens zwei von Null verschiedene Koeffizienten besitzt ...).