

Übungsaufgaben 7.

1. Sei k ein Körper der Charakteristik 0. Sei $k[X_1, Y_1, X_2, Y_2]$ der Polynomring in den vier Variablen X_1, Y_1, X_2, Y_2 mit Koeffizienten in k . Wir ordnen dem Monom $X_1^a Y_1^b X_2^c Y_2^d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{N}_0$ den *Bigrad* $(a+b, c+d)$ zu, und nennen $p \in k[X_1, Y_1, X_2, Y_2]$ *homogen vom Bigrad* (s, t) , wenn p eine Linearkombination von Monomen vom Bigrad (s, t) ist. Wir bezeichnen mit $M_{st} = k[X_1, Y_1, X_2, Y_2]_{st}$ den Unterraum der homogenen Polynome $p \in M = k[X_1, Y_1, X_2, Y_2]$ vom Bigrad (s, t) .

Definiere Endomorphismen e, f des k -Vektorraums $M = k[X_1, Y_1, X_2, Y_2]$ durch

$$e = Y_1 \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} + Y_2 \cdot \frac{\partial}{\partial X_2}, \quad \text{und} \quad f = X_1 \cdot \frac{\partial}{\partial Y_1} + X_2 \cdot \frac{\partial}{\partial Y_2}.$$

Setze $h = [e, f]$ und zeige:

(a) Das Tripel (e, f, h) ist ein Standard-Tripel und für $s, t \in \mathbb{N}_0$ gilt: der Unterraum M_{st} der Polynome vom Bigrad (s, t) ist ein Untermodul.

(b) Berechne die einfachen Untermoduln des Moduls $(M_{3,2}; e, f, h)$.

(c) Sei $s \geq t$. Zeige: Der Modul $(M_{st}; e, f, h)$ ist isomorph zu

$$M(s+t) \oplus M(s+t-2) \oplus \cdots \oplus M(s-t).$$

(Anmerkung: Üblicherweise betrachtet man statt M_{st} das sogenannte "Tensorprodukt" der Moduln $M(s)$ und $M(t)$; die hier zu beweisenden "Verzweigungsregeln" (branching rules) sind für viele Anwendungen von Interesse.)

2. Sei $t \in \mathbb{N}_0$. In den Aufgaben 5.2 und 6.1 wurden Moduln $\Delta(t)$ und $\nabla(t)$ konstruiert. Man konstruiere nun einen $\mathfrak{sl}_2$ -Modul M der eine Gewichtszerlegung besitzt (es ist also $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} M_\lambda$, dabei ist $M_\lambda = \{v \in M \mid hv = \lambda v\}$), mit einer Kette von Untermoduln $0 \subset M' \subset M'' \subset M$, sodass gilt:

$$M'' \simeq \Delta(t) \quad \text{und} \quad M/M' \simeq \nabla(t).$$

3. Sei G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit folgenden Eigenschaften: Jedes $g \in G$ ist längenerhaltend und bildet $\mathbb{Z}^n$ auf sich ab. Zeigen Sie: G ist endlich. (Oder besser: geben Sie eine effektive Schranke für die Ordnung von G an.)

4. Bestimmen Sie alle endlichen Teilmengen $\Phi \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit folgenden beiden Eigenschaften:

(a) Sind $\alpha, \beta \in \Phi$, so ist $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2 \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$ wieder in Φ .

(b) Sind $\alpha, \beta \in \Phi$, so ist $2 \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ eine ganze Zahl.