

Übungsaufgaben 8.

1. Sei Φ das Wurzelsystem vom Typ E_6 mit Wurzelbasis $\alpha_1, \dots, \alpha_6$. Man bestimme alle 6-Tuple $(z_1, \dots, z_6) \in \mathbb{N}_0^6$, sodass $\sum z_i \alpha_i$ eine Wurzel ist.

Für Mutige: Das Gleiche für E_7 und E_8 .

2. Sei Φ ein Wurzelsystem vom Rang r , sei eine Wurzelbasis gewählt und Φ^+ sei die Menge der positiven Wurzeln. Sei $\alpha \in \Phi^+$. Zeigen Sie:

- (a) Es ist $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi^+$ für jedes $\beta \neq \alpha \in \Phi^+$.
- (b) Unter σ_α wird also α auf $-\alpha$ (also eine negative Wurzel) abgebildet, alle anderen positiven Wurzeln werden untereinander permutiert.
- (c) Sei $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$. Es ist $\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$.
- (d) Bestimmen Sie δ in den Fällen $A_2, B_2, G_2, A_3, B_3, C_3$.

3. Seien $e_1, \dots, e_{r+1}$ die kanonischen Basisvektoren des euklid'schen Raums $\mathbb{R}^{r+1}$. Betrachten Sie den zum Vektor $\sum_{i=1}^{r+1} e_i$ orthogonalen Unterraum U . Seien Φ die Vektoren in U mit ganzzahligen Koordinaten und Länge $\sqrt{2}$. Zeigen Sie:

- (a) Φ ist ein Wurzelsystem (im euklid'schen Raum U) vom Typ A_r .
- (b) Bestimmen Sie die Kardinalität von Φ .
- (c) Die Menge der Vektoren $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ mit $1 \leq i \leq r$ bildet eine Wurzelbasis.
- (d) Die Spiegelung σ_{α_i} ist die Einschränkung der linearen Abbildung $\mathbb{R}^{r+1} \rightarrow \mathbb{R}^{r+1}$, die die i -te und die j -te Koordinate vertauscht. (Die Weyl-Gruppe ist also gerade die symmetrische Gruppe S_{r+1}).

4. Betrachten Sie ein quadratisches Polynom der Form

$$q(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i^2 - \sum_{i < j} a_{ij} X_i X_j$$

mit Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{N}_0$. Die zugehörige Bilinearform $\langle -, - \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ ist durch

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (q(x+y) - q(x) - q(y)).$$

definiert. Wir setzen voraus, daß $\langle -, - \rangle$ positiv definit ist.

Wir ordnen q einen Graphen $\Gamma(q)$ mit n Knoten zu, die wir mit $1, 2, \dots, n$ nummerieren; dabei verbinden wir die Knoten i und j , falls $a_{ij} > 0$ gilt. Zeigen Sie:

- (a) Es ist $a_{ij} \leq 1$ für alle i, j .
- (b) Der Graph $\Gamma(q)$ hat keine Kreise.
- (c) Jeder Knoten hat höchstens drei Nachbarn.
- (d) Wie geht es weiter ???