

Übungsaufgaben 9. Wurzelsysteme.

1. Sei Φ ein Wurzelsystem, sei Δ^+ eine Wurzelbasis. Ist $\alpha_i \in \Delta^+$, so schreiben wir wie üblich einfach $\sigma_i = \sigma_{\alpha_i}$.

(a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass sich jede Wurzel in der Form $\sigma_t \cdots \sigma_1(\alpha_0)$ mit $\alpha_0, \dots, \alpha_t \in \Delta^+$ schreiben lässt. Man folgere daraus: Die Weylgruppe wird von den Elementen σ_α mit $\alpha \in \Delta^+$ erzeugt.

(b) Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \Delta^+$. Sei $w = \sigma_t \cdots \sigma_1$ mit $l(w) = m$. Sei $m < t$. Man zeige: Es gibt $i < j$ mit $w = \sigma_t \cdots \sigma_{j+1} \sigma_{j-1} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1$. ("Herausstreichen zweier Spiegelungen")

(c) Man folgere aus (b): Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \Delta^+$. Sei $w = \sigma_t \cdots \sigma_1$ mit $l(w) = m$. Dann gibt es eine Teilmenge $I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_m\} \subseteq \{1, 2, \dots, t\}$ mit $w = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \cdots \sigma_{i_m}$.

2. Sei Φ ein Wurzelsystem mit zwei verschiedenen Wurzellängen. Man zeige: Die langen Wurzeln bilden selbst ein Wurzelsystem. Die kurzen Wurzeln bilden ebenfalls ein Wurzelsystem.

Man gebe für B_n, C_n, F_4, G_2 an, welche beiden Wurzelsysteme man jeweils erhält.

3. (a) Sei Φ ein Wurzelsystem im euklid'schen Raum E . Sei $\Psi \subseteq \Phi$ und E' der von Ψ erzeugte reelle Unterraum von E . Sei $\Phi' = E' \cap \Phi$. Man zeige, dass Φ' ein Wurzelsystem in E' ist.

(b) Man zeige: Ist Φ_0 eine Wurzelbasis des Wurzelsystems Φ , so ist jede Teilmenge $\Psi \subseteq \Phi_0$ Wurzelbasis eines Wurzelsystems.

(c) Man zeige, dass man durch (b) nicht jede Teilmenge $\Phi' \subseteq \Phi$ erhält, die in dem von Φ' erzeugten Unterraum E' ein Wurzelsystem bildet.

4. **Das Wurzelsystem F_4 .** Man zeige, dass die Vektoren $\pm e(i)$, $\pm e(i) \pm e(j)$ mit $i < j$ und $\frac{1}{2}(\pm e(1) \pm e(2) \pm e(3) \pm e(4))$ im $\mathbb{R}^4$ ein Wurzelsystem bilden und dass die Vektoren

$$\begin{aligned} \alpha(1) &= e(2) - e(3), & \alpha(2) &= e(3) - e(4), & \alpha(3) &= e(4), \\ \alpha(4) &= \frac{1}{2}(e(1) - e(2) - e(3) - e(4)) \end{aligned}$$

eine zugehörige Wurzelbasis sind.