

## Klausur

### I. Moduln

Sei  $k$  ein Körper. Sei  $I$  eine Menge. Sei  $M = (M, \phi_i)_{i \in I}$  ein  $I$ -Modul.

**1.** Ein Untermodul  $U$  von  $M$  heißt maximal, falls  $U \neq M$  gilt, und falls für jeden Untermodul  $U \subset U' \subseteq M$  gilt  $U' = M$ . Zeige: Ist  $U$  maximaler Untermodul von  $M$  und ist  $V$  ein beliebiger Untermodul von  $M$ , so gilt: Entweder ist  $V \subseteq U$  oder  $V + U = M$ .

**2.** Sei  $e \in \text{End}(M)$  ein Idempotent. Zeige: Auch  $1 - e$  ist ein Idempotent in  $\text{End}(M)$  und  $M = e(M) \oplus (1 - e)(M)$ .

**3.** Sei  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  in  $M(2 \times 2, \mathbb{C})$ . Man gebe eine Matrix  $B \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$  an, sodass  $(\mathbb{C}^2, A, B)$  ein einfacher Modul ist.

**4.** Sei  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  in  $M(2 \times 2, \mathbb{C})$ . Man zeige, dass es keine Matrix  $B \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$  gibt, sodass  $(\mathbb{C}^2, A, B)$  ein einfacher Modul ist.

**5.** Beweise: Sind  $U \subseteq V$  Untermoduln von  $M$ , so ist  $(M/U)/(V/U)$  zu  $M/V$  isomorph.

### Standard-Tripel ( $\mathfrak{sl}_2$ -Tripel)

Sei  $k = \mathbb{C}$ . Sei  $(e, f, h)$  ein Standard-Tripel auf dem Vektorraum  $V$ . Für  $t \in \mathbb{C}$  sei  $V_t = \text{Eig}(h; t)$ . Mit  $M(t)$  bezeichnen wir den einfachen  $\mathfrak{sl}_2$ -Modul der Dimension  $t + 1$ .

**6.** Sei  $V$  ein Vektorraum mit Basis  $v_1, \dots, v_5$ . Sei  $\phi: V \rightarrow V$  lineare Abbildung mit  $e(v_i) = v_{i-1}$  für  $2 \leq i \leq 5$  und  $e(v_1) = 0$ . Zeige: Es gibt Endomorphismen  $\psi, \gamma$ , sodass  $(\phi, \psi, \gamma)$  ein Standard-Tripel ist.

**7.** Sei  $V$  endlich-dimensional. Der Kern von  $e$  sei dreidimensional, mit Basis  $u, v, w$  und es gelte:  $h(u) = 4u$ ,  $h(v) = 5v$ ,  $h(w) = 6w$ . Man bestimme die Dimension von  $V$  und man gebe eine Basis des Kerns von  $h$  an.

**8.** Sei  $I$  die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen. Zeige:  $\bigoplus_{t \in I} V_t$  ist ein Untermodul von  $(V, e, f, h)$ .

**9.** Sei  $V$  endlich-dimensional, sei  $V$  die direkte Summe von  $m$  unzelegbaren Moduln. Kennt man  $\dim V_t$  für alle  $t \in \mathbb{Z}$ , so kann man daraus  $m$  berechnen. Wie?

**10.** Zeige: Der  $\mathfrak{sl}_2$ -Modul  $M(t)$  hat Endomorphismenring  $k$ .

### 3. Wurzelsysteme.

**11.** Sei  $\Phi$  ein irreduzibles Wurzelsystem mit zwei verschiedenen Wurzellängen. Zeigen Sie: Die kurzen Wurzeln bilden selbst ein Wurzelsystem.

**12.** Wie sieht die Cartan-Matrix zum Wurzelsystem  $E_8$  aus?

**13.** Sei  $\Phi$  das Wurzelsystem vom Typ  $G_2$ , und  $W$  die zugehörige Weyl-Gruppe. Zeige: In  $G$  gibt es ein Element der Länge 6.

### 3. Lie-Theorie.

**14.** Zeige: In jedem Ring  $R$  gilt

$$[r_1, [r_2, r_3]] + [r_2, [r_3, r_1]] + [r_3, [r_1, r_2]] = 0.$$

**15.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine endlich-dimensionale halbeinfache Lie-Algebra, sei  $\mathfrak{h}$  eine Cartan-Unteralgebra. Zeige: Für alle  $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$  gilt

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$

**16.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine endlich-dimensionale halbeinfache Lie-Algebra, sei  $\mathfrak{h}$  eine Cartan-Unteralgebra. Wann gilt

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$$

für alle  $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$  ?