

Routine-Aufgaben.

I. Moduln

Sei k ein Körper. Sei I eine Menge. Sei $M = (M, \phi_i)_{i \in I}$ ein I -Modul.

1. Seien U, S Untermoduln von M . Zeige: Ist S einfach, so gilt: Entweder ist $S \subseteq U$ oder $S \cap U = 0$.

2. Sei $e \in \text{End}(M)$ ein Idempotent. Zeige: $e(M)$ ist ein direkter Summand von M .

3. Sei M endlich-dimensional, und alle ϕ_i seien diagonalisierbar. Zeige: Gilt $[\phi_i, \phi_j] = 0$ für alle $i, j \in I$, und ist M einfacher Modul, so ist M ein-dimensional.

4. Man gebe zwei (2×2) -Matrizen A, B mit Koeffizienten in k an, sodass der Modul (k^2, A, B) einfach ist.

5. Man gebe zwei (2×2) -Matrizen A, B mit Koeffizienten in k an, sodass der Modul (k^2, A, B) unzerlegbar, aber nicht einfach ist.

6. Man gebe zwei (2×2) -Matrizen A, B mit Koeffizienten in k an, sodass der Modul (k^2, A, B) genau vier Untermoduln besitzt.

7. Man zeige: Ist M zwei-dimensionaler Modul mit mindestens 5 Untermoduln, so ist jeder Unterraum von M ein Untermodul. **(Neu)**

8. Sei (M, ϕ_1, ϕ_2) ein Modul mit $[\phi_1, \phi_2] = 1$ (die identische Abbildung). Zeige: Ist die Charakteristik von k gleich 0, so ist V unendlich-dimensional oder $V = 0$.

9. Sei M zweidimensional mit höchstens 4 Untermoduln. Zeige: M ist zyklisch.

10. Beweise: Sind H, K Untermoduln von M , so ist $(H + K)/K$ isomorph zu $H/(H \cap K)$.

11. Sei auch N ein I -Modul. Wir bilden den Modul $M \times N$. Zeige: Ordnet man dem Modul-Homomorphismen $f: M \rightarrow N$ seinen Graph $\{(x, f(x)) \mid x \in M\}$ zu, so erhalten wir eine Bijektion zwischen der Menge $\text{Hom}(M, N)$ und der Menge der Untermoduln $U \subseteq M \times N$ mit $U \oplus (0 \times N) = M \times N$.

II. Standard-Tripel ($\mathfrak{sl}_2$ -Moduln)

Sei $k = \mathbb{C}$. Sei (e, f, h) ein Standard-Tripel auf dem Vektorraum V . Für $t \in \mathbb{C}$ sei $V_t = \text{Eig}(h; t)$.

1. Zeige: Auch $(-f, -e, -h)$ ist ein Standard-Tripel auf V .

2. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Zeige: jeder nilpotente Endomorphismus ϕ von V gehört zu einem Standard-Tripel (ϕ, ψ, γ) .

3. Zeige: $e(V_t) \subseteq V_{t+2}$.

4. Zeige: $\bigoplus_{t \in 2\mathbb{Z}} V_t$ ist ein Untermodul von (V, e, f, h) .

5. Sei M endlich-dimensional, sei M die direkte Summe von m unzelegbaren Moduln. Kennt man $\dim M_t$ für alle $t \in \mathbb{Z}$, so kann man daraus m berechnen. Wie?

Wir bezeichnen mit $M(t)$ den einfachen $\mathfrak{sl}_2$ -Modul der Dimension $t + 1$.

6. Zeige: Der $\mathfrak{sl}_2$ -Modul $M(t)$ hat Endomorphismenring k .

7. Sei $V = M(3 \times 3, \mathbb{C})$ die Menge der (3×3) -Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$. Definiere Abbildungen $f: V \rightarrow V$ durch

$$e(A) = E_{12}A - AE_{12}, \quad \text{und} \quad f(A) = E_{21}A - AE_{21},$$

für alle $A \in V$. Setze $h = [e, f]$.

(a) Zeige: (e, f, h) ist ein $\mathfrak{sl}_2$ -Tripel.

(b) Wir können demnach V als direkte Summe von Kopien von $\mathfrak{sl}_2$ -Moduln der Form $M(t_i)$ schreiben, mit $t_i \in \mathbb{Z}$. Welche Zahlen t_i treten auf?

III. Wurzelsysteme.

1. Seien $e_1, \dots, e_4$ die kanonischen Basisvektoren des euklid'schen Raums $\mathbb{R}^4$. Betrachte den zum Vektor $\sum_{i=1}^4 e_i$ orthogonalen Unterraum U . Seien Φ die Vektoren in U mit ganzzahligen Koordinaten und Länge $\sqrt{2}$.

- (a) Man gebe explizit die Elemente von Φ an.
- (b) Zeige: Die Vektoren $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ mit $1 \leq i \leq 4$ bilden eine Basis von U .
- (c) Zeige: Φ ist ein Wurzelsystem im euklid'schen Raum U vom Typ A_3 .
- (d) Zeige: Die Vektoren $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ mit $1 \leq i \leq 4$ bilden eine Wurzelbasis.
- (e) Die Spiegelung σ_{α_i} ist die Einschränkung der linearen Abbildung $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, die die i -te und die $(i+1)$ -te Koordinate vertauscht.

2. Sei Φ ein Wurzel-System, sei Δ^+ eine Wurzelbasis. Ist $\alpha_i \in \Delta^+$, so schreiben wir wie üblich einfach $\sigma_i = \sigma_{\alpha_i}$.

Es sei gezeigt, dass sich jede Wurzel in der Form $\sigma_t \cdots \sigma_1(\alpha_0)$ mit $\alpha_0, \dots, \alpha_t \in \Delta^+$ schreiben läßt. Man folgere daraus: Die Weylgruppe wird von den Elemente σ_α mit $\alpha \in \Delta^+$ erzeugt.

3. Sei Φ ein Wurzelsystem mit zwei verschiedenen Wurzellängen. Zeigen Sie: Die langen Wurzeln bilden selbst ein Wurzelsystem.

4. Sei G eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ mit folgenden Eigenschaften: Jedes $g \in G$ ist längenerhaltend und bildet $\mathbb{Z}^n$ auf sich ab. Zeigen Sie: G ist endlich.

5. Wie sieht die Cartan-Matrix zum Wurzelsystem F_4 aus?

IV. Lie-Theorie.

1. Zeige: In jedem Ring R gilt

$$[r_1, [r_2, r_3]] + [r_2, [r_3, r_1]] + [r_3, [r_1, r_2]] = 0.$$

2. Sei k ein Körper. Betrachten Sie die Menge L der $(2n \times 2n)$ -Matrizen, die folgende Blockstruktur haben:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad D = -{}^t A, \quad B = {}^t B, \quad C = {}^t C$$

(mit $(n \times n)$ -Matrizen A, B, C, D). Zeigen Sie: Die Menge L ist ein Untervektorraum und abgeschlossen unter Kommutator-Bildung. Welche Dimension hat L ?

3. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale halbeinfache Lie-Algebra mit Cartan-Unter-algebra $\mathfrak{h}$. Zeige: Für alle $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ gilt

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$